Fundamentos Físicos y Tecnológicos

Apuntes Completos de Teoría, Circuitos y Problemas Resueltos

1.º Grado en Ingeniería Informática + Doble Grado DGIIM

Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación

Universidad de Granada (UGR)

Síntesis Integral del Temario Oficial:

Profesor: Pedro Cartujo y Equipo Docente de Electrónica (UGR)

- **Bloque I:** Electromagnetismo (Electrostática, Gauss, Corriente y Magnetismo).
- **Bloque II:** Análisis de Circuitos en DC (Kirchhoff, Thévenin, Norton y Transitorios RC/RL).
- **Bloque III:** Análisis de Circuitos en AC (Fasores, Impedancias, Potencia y Filtros).
- **Bloque IV:** Dispositivos Electrónicos (Semiconductores, Diodos y MOSFETs).
- **Bloque V:** Fundamentos de Electrónica Digital y Familias CMOS.
- **Bloque VI:** Amplificadores Operacionales y Conversión A/D–D/A.
- **Solucionario:** Exámenes Parciales y Problemas de Convocatorias Oficiales.

Plataforma **repasaYA**

Grado en Ingeniería Informática — Curso Académico 2024–2025 / 2025–2026

Índice general

1. Fundamentos del Electromagnetismo **7**

Conceptos Preliminares: Sistema Internacional y Álgebra Vectorial 7

1.1. Electrostática: Campo Eléctrico y Potencial Eléctrico 9

1.1.1. Concepto de Carga Eléctrica y sus Propiedades 9

1.1.2. Ley de Coulomb 10

1.1.3. Campo Eléctrico, Principio de Superposición y Líneas de Campo . . . 11

1.1.4. Flujo de Campo Eléctrico 14

1.1.5. Ley de Gauss y sus Aplicaciones Clásicas 14

1.1.6. Campo Eléctrico y Carga en Conductores en Equilibrio Electrostático 17

1.1.7. Energía Potencial Eléctrica, Trabajo Eléctrico y Potencial Eléctrico . . 19

1.1.8. Capacitores (Condensadores) y Capacitancia 20

1.2. Electrodinámica: Corriente Eléctrica y Campo Magnético 22

1.2.1. Corriente Eléctrica, Velocidad de Deriva y Ley de Ohm 22

1.2.2. Campo Magnético y Ley de Lorentz 25

1.2.3. Ley de Biot y Savart y Aplicaciones Fundamentales 27

1.2.4. Flujo de Campo Magnético y Ley de Ampère 32

1.2.5. Inducción Electromagnética: Ley de Faraday y Ley de Lenz 34

1.2.6. Fenómenos de Autoinducción: Bobina o Solenoide 37

1.3. Problemas Adicionales de Exámenes Oficiales de la UGR 38

2. Fundamentos de Teoría de Circuitos: Corriente Continua (DC) **41**

2.1. Elementos Lineales de Dos Terminales: Activos y Pasivos 41

2.1.1. Potencia Eléctrica y Convenio de Signos (Pasivo vs. Activo) 41

2.1.2. Elementos Activos: Fuentes Independientes y Dependientes 42

2.1.3. Elementos Pasivos: Resistencia, Condensador y Bobina 43

2.1.4. Asociación de Elementos y Teorema de Kennelly ($\Delta \leftrightarrow$ Y) 45

2.1.5. Elementos Reales y Comportamiento en Señal Continua (DC) 46

2.2. Leyes de Kirchhoff y Métodos Sistemáticos de Análisis 48

2.2.1. Topología de Redes y Leyes de Kirchhoff 48

2.2.2. Divisor de Tensión y Divisor de Corriente 48

2.2.3. Método de las Corrientes de Malla 49

2.2.4. Método de las Tensiones de Nudos 50

2.2.5. Teorema de Thévenin y Teorema de Norton 52

2.2.6. Teorema de Máxima Transferencia de Potencia 54

2.2.7. Principio de Superposición 54

2.3. Régimen Transitorio de Primer Orden: Carga y Descarga de un Condensador 55

2.3.1. Deducción de la Ecuación de Descarga del Condensador 55

2.3.2. Deducción de la Ecuación de Carga del Condensador 55

2.4. Ejercicios de Clase y Exámenes Resueltos Paso a Paso 56

3. Fundamentos de Teoría de Circuitos: Corriente Alterna (AC) 69
3.1. Señales Alternas Sinusoidales y Representación Fasorial 69
3.1.1. Caracterización de una Señal Periódica Senoidal 69
3.1.2. Repaso de Números Complejos para Circuitos AC 70
3.1.3. El Fasor, la Impedancia Compleja ($\mathbf{Z}$) y la Admitancia ($\mathbf{Y}$) 71
3.1.4. Relación Tensión-Intensidad en los Elementos Pasivos en CA 72
3.1.5. Análisis Completo del Circuito RC Serie en CA 73
3.2. Función de Transferencia, Diagramas de Bode y Filtros Pasivos 73
3.2.1. Función de Transferencia $\mathbf{T}(\omega)$ y Frecuencia de Corte ω_0 73
3.2.2. Diagramas de Bode de Amplitud y de Fase 74
3.2.3. Filtro RC Paso Bajo (Salida en el Condensador: $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_C$) 74
3.2.4. Filtro RC Paso Alto (Salida en la Resistencia: $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_R$) 75
3.3. Potencia en Corriente Alterna 75
3.3.1. Potencia Instantánea, Potencia Activa (Media) y Potencia Reactiva . 76
3.4. Ejemplos y Ejercicios de Clase Resueltos Paso a Paso 76
3.5. Formulario y Resumen General del Tema 3 (AC) 85

4. Dispositivos Electrónicos: Diodos y Transistores MOSFET 87
4.1. Conceptos Básicos de Semiconductores y la Unión PN 87
4.1.1. Bandas de Energía y Semiconductores Intrínsecos 87
4.1.2. Semiconductores Extrínsecos: Dopaje Tipo N y Tipo P 88
4.1.3. Mecanismos de Conducción en Semiconductores 89
4.1.4. La Unión PN en Equilibrio y bajo Polarización 89
4.2. El Diodo y Circuitos Básicos 90
4.2.1. Ecuación de Shockley y Curva Característica Real 90
4.2.2. Los 3 Modelos Lineales por Tramos del Diodo 91
4.2.3. Los 3 Métodos de Resolución de un Circuito con Diodo 92
4.2.4. Aplicaciones Clásicas del Diodo: Limitadores, Rectificadores, Filtros y Zener 93
4.3. El Transistor MOSFET y Circuitos Básicos 96
4.3.1. Estructura Física, Terminales y Símbolos 96
4.3.2. Regiones de Operación y Ecuaciones del NMOS y PMOS 97
4.3.3. Curvas Características y Cuadro Resumen de Resolución 99
4.4. Ejercicios Resueltos de Diodos y Transistores MOSFET 99

5. Fundamentos de Electrónica Digital y Lógica CMOS 111
5.1. Parámetros Característicos de una Familia Lógica 111
5.1.1. El Inversor, Niveles de Tensión y Márgenes de Ruido 111
5.1.2. Fan-In, Fan-Out, Tiempos de Retardo y Disipación de Potencia 112
5.2. Puertas Lógicas con Transistores MOSFET: Lógica NMOS y Lógica CMOS . 113
5.2.1. El Transistor MOS como Interruptor Controlado 113
5.2.2. Inversor y Puertas en Lógica NMOS (con Carga Pasiva o Activa) . . . 114
5.2.3. El Inversor Estático CMOS: Estructura, Tabla de Verdad y VTC . . . 115
5.3. Puertas CMOS Combinacionales: NOR, NAND y Síntesis Sistemática 116
5.3.1. Puertas Básicas de 2 Entradas: NOR y NAND en CMOS 116
5.4. Ejercicios Resueltos de Exámenes de Electrónica Digital 117

6. Amplificadores Operacionales y Conversión de Señales 123
6.1. El Amplificador Operacional y el Cortocircuito Virtual 123
6.1.1. Terminales, Símbolo Circuital y Modelo Equivalente Interno 123
6.1.2. Curva de Transferencia en Lazo Abierto y Aproximación Ideal 124

6.1.3. Realimentación Negativa vs. Realimentación Positiva y Cortocircuito Virtual 125
6.2. Configuraciones Lineales Básicas con Op-Amp 126
6.2.1. 1. Amplificador Inversor 126
6.2.2. 2. Amplificador No Inversor 126
6.2.3. 3. Seguidor de Tensión (Buffer de Ganancia Unidad) 127
6.2.4. 4. Sumador Inversor y Sumador No Inversor 127
6.2.5. 5. Amplificador Diferencial (Restador) 129
6.2.6. 6. Integrador Inversor y Derivador Inversor 129
6.2.7. 7. Configuraciones No Lineales: Comparador y Disparador de Schmitt 130
6.3. Conversión Analógica-Digital (A/D) y Digital-Analógica (D/A) 131
6.3.1. Diagrama de Bloques y Etapas de la Digitalización (Conversión A/D) 131
6.3.2. Convertidores Digital-Analógicos (DAC) con Amplificador Operacional 131
6.4. Ejercicios Resueltos Paso a Paso de Amplificadores Operacionales 132

7. Colección de Exámenes Oficiales Resueltos Paso a Paso 141
7.1. Examen Parcial 1: Electromagnetismo y Circuitos DC/AC 141
7.2. Examen Parcial 2: Dispositivos Electrónicos y Electrónica Digital 147

Tema 1

Fundamentos del Electromagnetismo

Metadatos del Tema y Fuentes:

Asignatura: Fundamentos Físicos y Tecnológicos (1.º Grado en Ingeniería Informática, UGR).

Profesor: Pedro Cartujo (Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores).

Bibliografía de Referencia: Sears, F. W., Zemansky, M. W., Young, H. D., Freedman, R. A., *Física Universitaria con Física Moderna* (Vol. 1 y 2), Addison-Wesley.

Contenido del Tema: Basado íntegramente en el programa oficial del Tema 1 (Secciones 1.1 Electrostática y 1.2 Electrodinámica y Magnetismo, subapartados 1.1.1 a 1.2.18) y en la relación de problemas y exámenes resueltos en clase.

Conceptos Preliminares: Sistema Internacional y Álgebra Vectorial

Antes de abordar el estudio del electromagnetismo, el programa de la asignatura establece tres pilares instrumentales de repaso indispensables (Tema 1 de Sears-Zemansky):

1. **Unidades del Sistema Internacional (SI), múltiplos y submúltiplos:** En electromagnetismo y teoría de circuitos es fundamental operar siempre en unidades básicas del SI (metro [m], kilogramo [kg], segundo [s], amperio [A], culombio [C], voltio [V], faradio [F], ohmio [Ω], tesla [T], weber [Wb], henrio [H]), convirtiendo previamente los prefijos habituales:

Submúltiplo	mili (m)	micro (μ)	nano (n)	pico (p)	femto (f)
Factor	10^{-3}	10^{-6}	10^{-9}	10^{-12}	10^{-15}
Múltiplo	kilo (k)	mega (M)	giga (G)	tera (T)	—
Factor	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}	—

2. **Notación y operaciones con vectores en $\mathbb{R}^3$:** Dados dos vectores $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ y $\vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ en la base cartesiana ortonormal $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$:

   - **Módulo y vector unitario:** $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Todo vector unitario en la dirección y sentido de $\vec{a}$ se obtiene normalizando: $\hat{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$.
   - **Suma y diferencia vectorial:** $\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\hat{i} + (a_y \pm b_y)\hat{j} + (a_z \pm b_z)\hat{k}$.
   - **Producto escalar:** $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \cos\theta = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$. Es un escalar positivo si el ángulo θ es agudo ($\theta < 90°$), nulo si son perpendiculares ($\theta = 90°$) y negativo si el ángulo es obtuso ($\theta > 90°$).

- **Producto vectorial:** $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ es un vector perpendicular al plano formado por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, de módulo $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}| \sin\theta$, anticonmutativo ($\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$), expresado mediante el determinante simbólico:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} \tag{1.1}$$

Ejercicio Resuelto: Operaciones con Vectores — Ejercicio 5 de la Relación del Tema 1

Dados los vectores $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} + 3\hat{k}$ y $\vec{b} = -\hat{i} + 3\hat{j} - \hat{k}$, calcular:

a) El ángulo que forman ambos vectores.

b) El módulo del vector suma $\vec{a} + \vec{b}$.

c) Un vector unitario en la misma dirección y sentido de $\vec{a}$.

d) Un vector unitario en la misma dirección y sentido de $\vec{b}$.

e) Un vector unitario en la misma dirección y sentido de $\vec{a} \times \vec{b}$.

f) Un vector unitario en la misma dirección y sentido de $\vec{b} \times \vec{a}$.

Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

a) Ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$: Calculamos primero los módulos y el producto escalar:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4 + 1 + 9} = \sqrt{14}, \qquad |\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{1 + 9 + 1} = \sqrt{11} \tag{1.2}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2, 1, 3) \cdot (-1, 3, -1) = -2 + 3 - 3 = -2 \tag{1.3}$$

Como el producto escalar es negativo, el ángulo que forman es obtuso ($\theta > 90°$):

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{-2}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{11}} = \frac{-2}{\sqrt{154}} \approx -0{,}1612 \implies \theta = \arccos(-0{,}1612) \approx 99{,}27° \tag{1.4}$$

b) Módulo del vector suma:

$$\vec{a}+\vec{b} = (2-1,\ 1+3,\ 3-1) = \hat{i}+4\hat{j}+2\hat{k} \implies |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{1^2 + 4^2 + 2^2} = \sqrt{21} \approx 4{,}58 \tag{1.5}$$

c) Vector unitario en la dirección de $\vec{a}$:

$$\vec{u}_a = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{2}{\sqrt{14}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{14}}\hat{j} + \frac{3}{\sqrt{14}}\hat{k} \tag{1.6}$$

d) Vector unitario en la dirección de $\vec{b}$:

$$\vec{u}_b = \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{-1}{\sqrt{11}}\hat{i} + \frac{3}{\sqrt{11}}\hat{j} - \frac{1}{\sqrt{11}}\hat{k} \tag{1.7}$$

e) Vector unitario en la dirección de $\vec{a} \times \vec{b}$:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = (-1 - 9)\hat{i} - (-2 + 3)\hat{j} + (6 + 1)\hat{k} = -10\hat{i} - \hat{j} + 7\hat{k} \tag{1.8}$$

$$|\vec{c}| = \sqrt{(-10)^2 + (-1)^2 + 7^2} = \sqrt{100 + 1 + 49} = \sqrt{150} \implies \vec{u}_{\vec{a}\times\vec{b}} = \frac{-10}{\sqrt{150}}\hat{i} - \frac{1}{\sqrt{150}}\hat{j} + \frac{7}{\sqrt{150}}\hat{k} \tag{1.9}$$

f) Vector unitario en la dirección de $\vec{b} \times \vec{a}$: Por la propiedad anticonmutativa del producto vectorial, $\vec{b} \times \vec{a} = -(\vec{a} \times \vec{b}) = 10\hat{i} + \hat{j} - 7\hat{k}$, con módulo $|\vec{b} \times \vec{a}| = \sqrt{150}$:

$$\vec{u}_{\vec{b}\times\vec{a}} = -\vec{u}_{\vec{a}\times\vec{b}} = \frac{10}{\sqrt{150}}\hat{i} + \frac{1}{\sqrt{150}}\hat{j} - \frac{7}{\sqrt{150}}\hat{k} \tag{1.10}$$

Nota sobre el cuaderno manuscrito: En el apartado f) de los apuntes de clase se transcribió por error la tercera componente de $\vec{a}$ como -1 en lugar de $+3$ al plantear el determinante $\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2\hat{i} + 3\hat{j} - 7\hat{k}$ (de módulo $\sqrt{62}$). Usando el vector $\vec{a} = (2, 1, 3)$ del enunciado, el resultado exacto es el opuesto del apartado e).

1.1 Electrostática: Campo Eléctrico y Potencial Eléctrico

El **electromagnetismo** es la rama de la Física que estudia y unifica los fenómenos eléctricos y magnéticos en una sola teoría. Describe los fenómenos físicos macroscópicos en los cuales intervienen cargas eléctricas en reposo y en movimiento, usando para ello campos eléctricos y magnéticos y sus efectos sobre las sustancias sólidas, líquidas y gaseosas.

En particular, la **electrostática** estudia los fenómenos que ocurren por la carga eléctrica de la materia cuando ésta es estacionaria (en reposo) y no depende del tiempo.

1.1.1 Concepto de Carga Eléctrica y sus Propiedades

La unidad de carga elemental de la naturaleza es la magnitud de la carga del electrón. A escala atómica, la materia neutra posee igual número de protones (carga positiva en el núcleo) que de electrones (carga negativa en la corteza). Un cuerpo macroscópico está cargado eléctricamente cuando tiene exceso o falta de electrones:

- **Defecto de electrones $\implies$ Carga positiva ($+q$).**
- **Exceso de electrones $\implies$ Carga negativa ($-q$).**

Dos cargas del mismo signo se repelen (positivo con positivo, negativo con negativo) y dos cargas de distinto signo se atraen (positivo con negativo).

Definición: Propiedades de las Cargas Eléctricas

1. **Conservación de la carga:** La carga eléctrica total no varía en un sistema eléctricamente aislado ($\sum q_{inicial} = \sum q_{final} = \text{constante}$). La carga no se crea ni se destruye, sólo se transfiere de un cuerpo a otro.

2. **Cuantización de la carga:** La carga eléctrica que posee cualquier cuerpo material es siempre un múltiplo entero de la unidad de carga elemental (la carga del electrón e):

$$q = \pm n \cdot e, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}, \qquad e = 1{,}602 \times 10^{-19}\ \text{C} \approx 1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C} \tag{1.11}$$

3. **Unidad en el Sistema Internacional:** Se mide en **culombios** (C), donde $1\ \text{C} = 1\ \text{A} \cdot \text{s}$.

4. **Invarianza relativista:** El valor de la carga eléctrica de una partícula no depende de su estado de movimiento.

1.1.2 Ley de Coulomb

Ley / Teorema: Ley de Coulomb

La fuerza electrostática de atracción o repulsión entre dos cargas puntuales en reposo q_1 y q_2 es directamente proporcional al producto de las dos cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r que las separa, actuando en la dirección de la recta que las une:

$$\vec{F}_{1\to 2} = K_0 \frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{r} \tag{1.12}$$

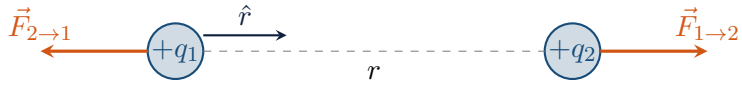
donde:

- $\hat{r} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}$ es el vector unitario dirigido desde la carga q_1 que crea la fuerza hacia la carga q_2 que la sufre.
- $K_0 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \approx 8{,}988 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2} \approx 9 \times 10^9\ \mathrm{N\,m^2/C^2}$ es la **constante eléctrica del vacío**.
- $\varepsilon_0 = 8{,}854 \times 10^{-12}\ \mathrm{F/m}\ (\equiv \mathrm{C^2/(Nm^2)})$ es la **permitividad eléctrica del vacío**.

Importante / Ojo Examen: Consecuencias Fundamentales de la Ley de Coulomb

Esta ley experimental demuestra que:

- **Criterio de signos:** Cargas del mismo signo ($q_1 q_2 > 0$) se repelen ($\vec{F}_{1\to 2}$ tiene el mismo sentido que $\hat{r}$); cargas de signo opuesto ($q_1 q_2 < 0$) se atraen ($\vec{F}_{1\to 2}$ tiene sentido opuesto a $\hat{r}$).
- **Verifica la Tercera Ley de Newton (Principio de Acción y Reacción):** La fuerza que ejerce la primera carga sobre la segunda tiene exactamente el **mismo módulo** y la **misma dirección** que la fuerza que ejerce la segunda sobre la primera, pero en **sentido contrario**: $\vec{F}_{1\to 2} = -\vec{F}_{2\to 1}$.



Fuerzas electrostáticas repulsivas entre cargas del mismo signo ($\vec{F}_{2\to 1} = -\vec{F}_{1\to 2}$)

Ejercicio Resuelto: Fuerza de Coulomb y Contacto entre Esferas Metálicas — Ejercicio 21 de la Relación

Calcular la fuerza con la que se atraen dos esferas metálicas A y B del mismo radio, sabiendo que están cargadas con $q_1 = 3$ µC y $q_2 = -9$ µC respectivamente, y colocadas en el vacío a una distancia de 30 cm entre sus centros. Si las esferas anteriores se ponen en contacto y luego se colocan en las posiciones iniciales, calcular la nueva fuerza de interacción entre ambas.

Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

1) Fuerza inicial antes del contacto: Como $q_1 = +3 \times 10^{-6}$ C y $q_2 = -9 \times 10^{-6}$ C

tienen signos opuestos y están separadas $r = 0{,}3$ m, las esferas **se atraen** con un módulo dado por la Ley de Coulomb:

$$|\vec{F}_{inicial}| = K\frac{|q_1 \cdot q_2|}{r^2} = 9\times10^9 \cdot \frac{(3\times10^{-6})\cdot(9\times10^{-6})}{(0{,}3)^2} = \frac{0{,}243}{0{,}09} = 2{,}7 \text{ N} \quad \text{(atractiva)} \tag{1.13}$$

2) Contacto entre las esferas y redistribución de carga: Al juntar las dos esferas conductoras se produce una transferencia de electrones hasta que **se igualan sus potenciales eléctricos** ($V_A = V_B$). Dado que ambas esferas tienen exactamente el **mismo radio** R:

$$V_A = V_B \implies \frac{KQ_1'}{R} = \frac{KQ_2'}{R} \implies Q_1' = Q_2' \tag{1.14}$$

Por el **Principio de Conservación de la Carga**, la suma algebraica de las cargas iniciales debe ser igual a la suma de las cargas finales tras el contacto:

$$Q_{total} = q_1 + q_2 = 3\ \mu\text{C} - 9\ \mu\text{C} = -6\ \mu\text{C} = Q_1' + Q_2' = 2Q_1' \implies Q_1' = Q_2' = -3\ \mu\text{C} \tag{1.15}$$

3) Fuerza final al separarlas a la distancia inicial ($r = 0{,}3$ m): Ahora ambas esferas tienen carga negativa ($-3\ \mu$C y $-3\ \mu$C), por lo que **se repelen** con fuerza:

$$|\vec{F}_{final}| = K\frac{|Q_1' \cdot Q_2'|}{r^2} = 9\times10^9 \cdot \frac{(3\times10^{-6})\cdot(3\times10^{-6})}{(0{,}3)^2} = \frac{0{,}081}{0{,}09} = 0{,}9 \text{ N} \quad \text{(repulsiva)} \tag{1.16}$$

1.1.3 Campo Eléctrico, Principio de Superposición y Líneas de Campo

El **campo eléctrico** es la región del espacio donde actúan las fuerzas eléctricas. Existe con que sólo haya una carga fuente: es una propiedad física que adquiere el espacio por el mero hecho de introducir una carga en él.

Definición: Intensidad de Campo Eléctrico $\vec{E}$

La intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ en un punto P es una magnitud vectorial que representa la fuerza eléctrica que actúa por unidad de carga testigo positiva q_0 colocada en dicho punto:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = K\frac{q}{r^2}\hat{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\hat{r} \qquad [\text{N/C} \equiv \text{V/m}] \tag{1.17}$$

- Si la carga fuente es **positiva** ($q > 0$), el vector $\vec{E}$ en el punto P es **radial saliente** (mismo sentido que el vector unitario $\hat{r}$).
- Si la carga fuente es **negativa** ($q < 0$), el vector $\vec{E}$ en el punto P es **radial entrante** (apunta hacia la carga q, sentido opuesto a $\hat{r}$).

Ley / Teorema: Principio de Superposición y Densidades de Carga

1. **Distribución discreta de cargas:** El campo eléctrico total en un punto $\vec{r}_P$ es la suma vectorial de los campos eléctricos individuales generados por cada una de las

N cargas en dicho punto:

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = \sum_{j=1}^{N} \vec{E}_j(\vec{r}_P) = K \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{|\vec{r}_P - \vec{r}_j|^2}\, \hat{r}_{P-j} \tag{1.18}$$

2. **Distribución continua de carga:** Cuando la carga está distribuida de forma continua, las cargas puntuales se transforman en diferenciales de carga dQ y las sumatorias en integrales sobre la región cargada:

$$\vec{E}(\vec{r}_P) = K \int \frac{dQ}{|\vec{r}_P - \vec{r}'|^2}\, \hat{r}_{P-r'} = K \int_{V'} \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}_P - \vec{r}'|^2}\, \hat{r}_{P-r'}\, dV' \tag{1.19}$$

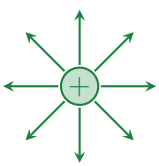
Según la geometría del cuerpo cargado (1D, 2D o 3D), definimos tres **densidades de carga**:

Densidad lineal (λ)	**Densidad superficial (σ)**	**Densidad volumétrica (ρ)**
Carga por unidad de longitud: $\lambda = \dfrac{dQ}{d\ell} \implies dQ = \lambda\, d\ell$ Unidades: [C/m]	Carga por unidad de superficie: $\sigma = \dfrac{dQ}{dS} \implies dQ = \sigma\, dS$ Unidades: [C/m^2]	Carga por unidad de volumen: $\rho = \dfrac{dQ}{dV} \implies dQ = \rho\, dV$ Unidades: [C/m^3]

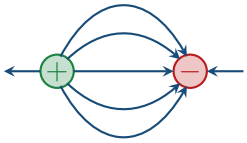
Líneas de Campo Eléctrico

Una **línea de campo eléctrico** es una recta o curva imaginaria trazada en el espacio de tal manera que su vector tangente en cada punto P tiene exactamente la dirección y el sentido del vector campo eléctrico $\vec{E}_P$ en ese punto.

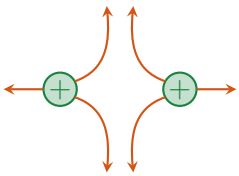
- Nacen siempre en las cargas positivas (fuentes) y mueren en las cargas negativas (sumideros) o en el infinito.
- El número de líneas por unidad de área transversal es proporcional a la intensidad $|\vec{E}|$ (donde las líneas están más juntas, el campo es más intenso). Dos líneas de campo **nunca pueden cortarse**.



Carga positiva



Dipolo eléctrico ($+q$ y $-q$)



Dos cargas positivas ($+q$ y $+q$)

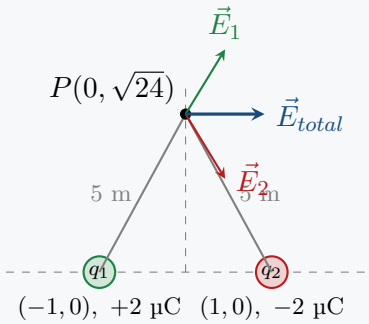
Ejercicio Resuelto: Campo y Potencial de un Dipolo Eléctrico — Ejercicio 16 de la Relación

Un dipolo eléctrico (dos cargas iguales y de signo contrario separadas por una pequeña distancia) está formado por dos cargas de $q_1 = +2$ µC y $q_2 = -2$ µC distantes entre sí 2 m. Calcular:

a) El campo eléctrico resultante y el potencial en un punto P de la mediatriz del

segmento que las une, distante 5 m de cada carga.

b) Las mismas preguntas en el caso de que ambas cargas fueran positivas (+2 µC y +2 µC).



Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

Situamos q_1 en $(-1, 0)$ m y q_2 en $(1, 0)$ m. Por el Teorema de Pitágoras, la ordenada del punto P sobre la mediatriz ($x = 0$) es:

$$5^2 = y^2 + 1^2 \implies y = \sqrt{24} \text{ m} \implies P = (0, \sqrt{24}) \text{ m} \tag{1.20}$$

Los vectores desplazamiento desde cada carga hasta P y sus respectivos vectores unitarios ($\hat{r}_i = \vec{r}_i/5$) son:

$$\vec{r}_1 = (0, \sqrt{24}) - (-1, 0) = (1, \sqrt{24}) \implies \hat{r}_1 = \left(\frac{1}{5}, \frac{\sqrt{24}}{5}\right) \tag{1.21}$$

$$\vec{r}_2 = (0, \sqrt{24}) - (1, 0) = (-1, \sqrt{24}) \implies \hat{r}_2 = \left(-\frac{1}{5}, \frac{\sqrt{24}}{5}\right) \tag{1.22}$$

a) Caso del dipolo ($q_1 = +2$ µC, $q_2 = -2$ µC):

$$\vec{E}_1 = K\frac{q_1}{r_1^2}\hat{r}_1 = 9 \times 10^9 \cdot \frac{2 \times 10^{-6}}{5^2}\left(\frac{1}{5}\hat{i} + \frac{\sqrt{24}}{5}\hat{j}\right) = 144\,\hat{i} + 705{,}5\,\hat{j} \text{ N/C} \tag{1.23}$$

$$\vec{E}_2 = K\frac{q_2}{r_2^2}\hat{r}_2 = 9 \times 10^9 \cdot \frac{-2 \times 10^{-6}}{5^2}\left(-\frac{1}{5}\hat{i} + \frac{\sqrt{24}}{5}\hat{j}\right) = 144\,\hat{i} - 705{,}5\,\hat{j} \text{ N/C} \tag{1.24}$$

Sumando ambos vectores, las componentes verticales se cancelan y las horizontales se duplican:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 288\,\hat{i} \text{ N/C} \tag{1.25}$$

El potencial electrostático en P es la suma algebraica escalar de los potenciales de cada carga:

$$V_{total} = V_1 + V_2 = K\left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2}\right) = 3600 \text{ V} + (-3600 \text{ V}) = 0 \text{ V} \tag{1.26}$$

b) Caso de dos cargas positivas iguales ($q_1 = +2$ µC, $q_2 = +2$ µC): Ahora $\vec{E}_2$ invierte su signo respecto al apartado anterior: $\vec{E}_2 = -144\,\hat{i} + 705{,}5\,\hat{j}$ N/C. Por tanto, se anulan las componentes horizontales y se suman las verticales:

$$\vec{E}_{total} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 1411\,\hat{j} \text{ N/C}, \qquad V_{total} = V_1 + V_2 = 3600 + 3600 = 7200 \text{ V} \tag{1.27}$$

1.1.4 Flujo de Campo Eléctrico

Definición: Flujo de Campo Eléctrico Φ_E

El flujo de campo eléctrico Φ_E representa el número neto de líneas de campo que atraviesan una superficie de área A:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E\cos(\phi)\, dA \qquad \left[\mathrm{N\,m^2/C} \equiv \mathrm{V\,m}\right] \tag{1.28}$$

donde ϕ es el ángulo que forma el vector campo eléctrico $\vec{E}$ con el vector diferencial de superficie $d\vec{A}$ (vector perpendicular o normal a la superficie en cada punto). Para un campo uniforme y una superficie plana de área A:

- Si $\phi = 0°$ ($\vec{E} \parallel \vec{A}$, campo perpendicular al plano de la superficie): $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A$ (flujo máximo).
- Si $\phi = 90°$ ($\vec{E} \perp \vec{A}$, campo paralelo o rasante a la superficie): $\Phi_E = 0$ (ninguna línea atraviesa la superficie).
- Para cualquier otro ángulo ϕ: $\Phi_E = \vec{E} \cdot \vec{A} = E \cdot A\cos(\phi)$.

1.1.5 Ley de Gauss y sus Aplicaciones Clásicas

Ley / Teorema: Ley de Gauss

El flujo total de un campo eléctrico a través de cualquier superficie cerrada S (superficie gaussiana) es igual al cociente entre la suma algebraica de las cargas contenidas en el volumen limitado por ella ($Q_{encerrada}$) y la permitividad eléctrica del vacío ε_0:

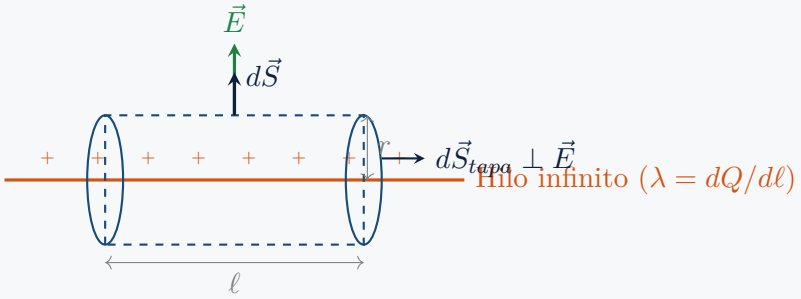
$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi K_0\, Q_{encerrada} = \frac{Q_{encerrada}}{\varepsilon_0} \tag{1.29}$$

- **Flujo positivo ($\Phi_E > 0$):** Predominan cargas positivas dentro del volumen encerrado.
- **Flujo negativo ($\Phi_E < 0$):** Predominan cargas negativas dentro del volumen encerrado.
- **Flujo neto cero ($\Phi_E = 0$):** No hay carga en el volumen encerrado, o bien la suma algebraica neta de las cargas interiores es igual a cero ($\sum q_{int} = 0$).

A continuación desarrollamos las tres demostraciones fundamentales de la Ley de Gauss exigidas en clase y en examen: el hilo rectilíneo infinito (simetría cilíndrica), el plano infinito (simetría plana) y la esfera dieléctrica uniformemente cargada (simetría esférica).

Ejercicio Resuelto: Campo y Potencial de un Hilo Rectilíneo Infinito — Ejercicio 23 de la Relación

Hallar mediante la Ley de Gauss el campo eléctrico creado por un hilo rectilíneo infinito con densidad lineal de carga uniforme λ. Si dicho hilo crea un potencial de $V_A = 20$ V en los puntos situados a una distancia $r_A = 2$ m de la recta y de $V_B = 10$ V en los situados a $r_B = 4$ m de la misma, ¿cuál es la densidad lineal de carga λ del hilo?



Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

Primera parte: Deducción del campo eléctrico con la Ley de Gauss. Elegimos como superficie gaussiana un cilindro coaxial de radio r y longitud ℓ. Por simetría radial, el campo eléctrico $\vec{E}$ es perpendicular al hilo en todo punto: sólo atraviesa la superficie lateral del cilindro ($S_{lat} = 2\pi r\ell$), mientras que en las tapas superior e inferior el flujo es nulo ($\vec{E} \perp d\vec{S}_{tapas} \implies \cos 90° = 0$). En la cara lateral, $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ ($\cos 0° = 1$) y $|\vec{E}|$ es constante en todos los puntos por estar a igual distancia r, por lo que sale fuera de la integral:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{lat}} E\, dS \cos(0°) = E \oint_{S_{lat}} dS = E \cdot (2\pi r\ell) \tag{1.30}$$

Expresando la carga encerrada en función de la densidad lineal $\lambda = \frac{dQ}{d\ell} \implies Q_{enc} = \lambda \cdot \ell$, aplicamos la Ley de Gauss:

$$E \cdot (2\pi r\ell) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda \cdot \ell}{\varepsilon_0} \implies \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} \quad \text{(se cancela la longitud } \ell) \tag{1.31}$$

Segunda parte: Cálculo de λ a partir de la diferencia de potencial. Integramos el campo eléctrico entre $r_A = 2$ m ($V_A = 20$ V) y $r_B = 4$ m ($V_B = 10$ V):

$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \Big[\ln(r)\Big]_{r_A}^{r_B} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_B}{r_A}\right) \tag{1.32}$$

Despejando la densidad lineal de carga λ:

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0 (V_A - V_B)}{\ln(r_B/r_A)} = \frac{2\pi \cdot (8{,}854 \times 10^{-12}) \cdot (20 - 10)}{\ln(4/2)} = \frac{5{,}563 \times 10^{-10}}{\ln(2)} \approx 8{,}02{\times}10^{-10}\ \text{C/m} \tag{1.33}$$

Ejercicio Resuelto: Campo y Potencial de un Plano Infinito Cargado — Ejercicio 24 de la Relación

Hallar el campo eléctrico y el potencial creados por un plano infinito no conductor cuya densidad superficial de carga uniforme es σ.

Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

1) Campo eléctrico mediante la Ley de Gauss: Tomamos como superficie gaussiana un cilindro (o prisma) perpendicular al plano infinito, con tapas de área S equidistantes a ambos lados de la lámina. Por simetría plana, el campo eléctrico $\vec{E}$ es perpendicular al plano hacia afuera en ambas caras y no atraviesa la pared lateral del cilindro. Por

tanto, el flujo total es la suma del flujo a través de las dos tapas ($2S$), y la carga encerrada es $Q_{enc} = \sigma \cdot S$:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies E \cdot (2S) = \frac{\sigma \cdot S}{\varepsilon_0} \implies \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}} \tag{1.34}$$

Observamos que el campo eléctrico creado por un plano infinito es **uniforme** (constante en módulo y dirección, independiente de la distancia r al plano).

2) Potencial eléctrico: Como el plano se extiende hasta el infinito, no podemos tomar el origen de potencial en el infinito; tomamos como referencia de potencial cero el propio plano ($V_B = 0$ en $r_B = 0$). Integrando desde un punto A a distancia r_A hasta el punto B sobre el plano:

$$V_A - V_B = \int_{r_A}^{0} E\, dr = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\Big[r\Big]_{r_A}^{0} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(0 - r_A) \implies \boxed{V_A = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} r_A} \tag{1.35}$$

A medida que nos alejamos del plano cargado positivamente en el sentido de las líneas de campo, el potencial eléctrico va disminuyendo linealmente con la distancia.

Ejercicio Resuelto: Campo y Potencial de una Esfera Dieléctrica Cargada Uniformemente — Ejercicio 25 de la Relación

Calcular el campo eléctrico y el potencial creados por una esfera dieléctrica (aislante) maciza de radio R cargada uniformemente en todo su volumen con una carga total Q, a una distancia r de su centro: a) fuera de la esfera ($r > R$), y b) dentro de la esfera ($r < R$).

Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

a) Región exterior a la esfera ($r > R$): Usamos como superficie de Gauss una esfera concéntrica de radio $r > R$. Por simetría esférica, $\vec{E}$ es radial y paralelo a $d\vec{S}$ en todo punto ($\vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, dS$) y su módulo es constante sobre la esfera de área $4\pi r^2$. La carga total encerrada es toda la carga de la esfera ($Q_{enc} = Q$):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS = E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q}{\varepsilon_0} \implies \boxed{E_{ext}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2} = K\frac{Q}{r^2}} \quad (r > R) \tag{1.36}$$

El potencial en el exterior (tomando $V(\infty) = 0$) es idéntico al de una carga puntual Q situada en el centro:

$$V_P(r) = \int_r^{\infty} E_{ext}(r)\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_r^{\infty} \implies \boxed{V_{ext}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{KQ}{r}} \quad (r \geq R) \tag{1.37}$$

b) Región interior a la esfera ($r < R$): Al ser una esfera dieléctrica cargada uniformemente, definimos su densidad volumétrica de carga constante ρ:

$$\rho = \frac{Q}{V_{esfera}} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} \tag{1.38}$$

Tomando una esfera gaussiana interior de radio $r < R$, la carga encerrada Q_{enc} es únicamente la contenida en la esfera de radio r:

$$Q_{enc} = \rho \cdot V_{gauss} = \left(\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\right) \cdot \left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = Q\frac{r^3}{R^3} \tag{1.39}$$

Aplicando la Ley de Gauss en $r < R$:

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{Qr^3}{\varepsilon_0 R^3} \implies \boxed{E_{int}(r) = \frac{Q \cdot r}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{KQ}{R^3} r} \quad (r < R) \tag{1.40}$$

Dentro de la esfera dieléctrica el campo crece linealmente con el radio r (siendo cero en el centro $r = 0$). Para hallar el potencial en un punto interior $r < R$, debemos partir la integral desde r hasta ∞ en dos tramos (de r a R con E_{int}, y de R a ∞ con E_{ext}):

$$V_{int}(r) = \int_r^\infty E\, dr = \int_r^R E_{int}(r)\, dr + \int_R^\infty E_{ext}(r)\, dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \int_r^R r\, dr + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} \tag{1.41}$$

$$V_{int}(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \frac{R^2 - r^2}{2} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \implies \boxed{V_{int}(r) = \frac{3Q}{8\pi\varepsilon_0 R} - \frac{Qr^2}{8\pi\varepsilon_0 R^3}} \tag{1.42}$$

1.1.6 Campo Eléctrico y Carga en Conductores en Equilibrio Electrostático

Según la conductividad eléctrica σ_c de un material, éste se clasifica en:

- **Conductor:** Posee gran cantidad de cargas libres (electrones de conducción en metales) que se mueven libremente ante cualquier campo eléctrico.
- **Aislante o dieléctrico:** Sus electrones están fuertemente ligados a los átomos y no permiten el paso de corriente.
- **Semiconductor** (silicio, germanio): Puede comportarse como conductor o como aislante en función del campo eléctrico aplicado, la temperatura o el dopado (se estudia en detalle en el Tema 4).

Definición: Propiedades de un Conductor en Equilibrio Electrostático

Si introducimos una carga neta en un conductor y esperamos a que alcance el equilibrio electrostático (cargas en reposo):

1. **Toda la carga libre se distribuye exclusivamente por la superficie exterior:** Las cargas del mismo signo tienden a repelerse entre sí lo máximo posible, emigrando hasta la superficie límite del material ($\rho_{int} = 0$).
2. **El campo eléctrico en el interior del material conductor es rigurosamente cero ($\vec{E}_{int} = \vec{0}$):** Si no fuese cero, las cargas libres interiores experimentarían fuerza $\vec{F} = q\vec{E}$ y habría corriente, contradiciendo el equilibrio.
3. **El campo eléctrico justo en la superficie exterior es perpendicular a ella:**

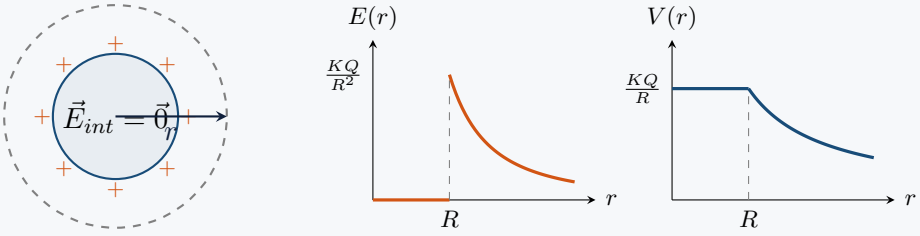
$$\vec{E}_{sup} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \hat{n} \tag{1.43}$$

   Si el campo eléctrico no fuera perpendicular a la superficie, existiría una componente tangencial $\vec{E}_t$ que arrastraría las cargas superficiales y no habría equilibrio.
4. **El volumen y la superficie del conductor forman un volumen equipotencial:** Como $\vec{E}_{int} = \vec{0}$, no cuesta trabajo mover una carga por su interior, luego $V =$ constante en todo el conductor e igual al potencial de su superficie.

5. **Efecto de las puntas:** En un conductor de forma irregular, la densidad superficial de carga σ se acumula preferentemente en las **zonas puntiagudas** (de menor radio de curvatura), donde las cargas equilibran las componentes tangenciales y el campo exterior es mucho más intenso.

Ejercicio Resuelto: Campo y Potencial de una Esfera Conductora Cargada — Ejercicio 26 de la Relación

Calcular el campo eléctrico y el potencial creados por una esfera conductora de radio R cargada con una densidad superficial σ (carga total Q_{enc}) a una distancia r de su centro: a) si $r > R$ (fuera), y b) si $r < R$ (dentro).



Esfera conductora (Q en $r = R$)

Resolución Paso a Paso:

a) Campo y potencial en el exterior ($r > R$): Envolvemos la esfera en una superficie gaussiana esférica concéntrica de radio $r > R$. Por simetría, $\vec{E} \parallel d\vec{S}$ y E es uniforme a distancia r:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot (4\pi r^2) = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} \implies \boxed{E_{ext}(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{enc}}{r^2} = K\frac{Q_{enc}}{r^2}} \quad (r > R) \tag{1.44}$$

Integrando desde $r > R$ hasta el infinito ($V(\infty) = 0$), el potencial en el exterior es el mismo que el de una carga puntual:

$$V_{ext}(r) = \int_r^\infty E_{ext}(r)\, dr = \frac{Q_{enc}}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \boxed{\frac{K \cdot Q_{enc}}{r}} \quad (r \geq R) \tag{1.45}$$

b) Campo y potencial en el interior ($r < R$): Al ser una esfera metálica (conductora), toda la carga se desplaza hacia la superficie ($r = R$). Por tanto, cualquier esfera gaussiana interior de radio $r < R$ encierra carga nula ($Q_{enc} = 0$):

$$E \cdot (4\pi r^2) = \frac{0}{\varepsilon_0} = 0 \implies \boxed{\vec{E}_{int}(r) = \vec{0}} \quad (r < R) \tag{1.46}$$

Para el potencial en un punto interior ($r < R$), desglosamos la integral desde r hasta ∞ en el tramo interior ($r \to R$, donde $E_{int} = 0$) más el tramo exterior ($R \to \infty$):

$$V_{int}(r) = \int_r^\infty E\, dr = \int_r^R \underbrace{E_{int}}_{=0}\, dr + \int_R^\infty E_{ext}\, dr = \int_R^\infty K\frac{Q_{enc}}{r^2}\, dr = \boxed{\frac{K \cdot Q_{enc}}{R} = V_{superficie}} \quad (r \leq R) \tag{1.47}$$

Ojo examen (Aclaración al margen del cuaderno): En la página 15 del manuscrito original los títulos de los apartados de potencial aparecen intercambiados con la anotación al margen *"no corregido"*. Como se demuestra arriba, para $r > R$ (fuera) el potencial decrece como $V(r) = \frac{KQ}{r}$, mientras que para $r < R$ (dentro) el potencial permanece constante e igual al potencial de la superficie $V(r) = \frac{KQ}{R}$.

1.1.7 Energía Potencial Eléctrica, Trabajo Eléctrico y Potencial Eléctrico

1.1.7. Energía Potencial Eléctrica (U)

Cuando una partícula con carga q se desplaza por un campo eléctrico, el campo ejerce sobre ella una fuerza capaz de realizar trabajo, lo cual permite asociarle una **energía potencial eléctrica** medida en **Julios** (J).

Definición: Energía Potencial Eléctrica en un Punto

La energía potencial eléctrica U_r de una carga puntual q situada a una distancia r de una carga fuente Q (tomando $U(\infty) = 0$) se define como el trabajo necesario que debe realizar una fuerza externa ($\vec{F}_{ext} = -\vec{F}_{elec}$) para traer la carga q desde el infinito hasta dicho punto sin acelerarla; equivalentemente, es igual al trabajo que realiza la fuerza del campo eléctrico al llevar la carga desde ese punto hasta el infinito:

$$U_r = W^{ext}_{\infty\to r} = W^{campo}_{r\to\infty} = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0 r} = K\frac{Q\cdot q}{r} \qquad [\mathrm{J}] \tag{1.48}$$

1.1.8. Trabajo Eléctrico (W_{AB})

La fuerza electrostática de Coulomb es una **fuerza conservativa**: al desplazarse una carga q de un punto A a otro punto B dentro del campo eléctrico, el trabajo realizado por el campo no depende del camino seguido, sino exclusivamente de las posiciones inicial y final:

$$W^{campo}_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}_{elec}\cdot d\vec{\ell} = -\Delta U = U_A - U_B = \frac{Q\cdot q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{1.49}$$

Por su parte, el trabajo realizado por un agente o fuerza externa en cuasi-equilibrio para llevar la carga desde A hasta B tiene el mismo valor absoluto y signo opuesto al trabajo del campo eléctrico:

$$W^{ext}_{A\to B} = -W^{campo}_{A\to B} = \Delta U = U_B - U_A \tag{1.50}$$

1.1.9. Potencial Eléctrico (V) y Relación con el Campo Eléctrico

Definición: Potencial Eléctrico y Diferencia de Potencial

El **potencial eléctrico** V en cualquier punto de un campo eléctrico es la energía potencial eléctrica por unidad de carga de prueba q situada en ese punto:

$$V = \frac{U}{q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} = K\frac{Q}{r} \qquad \left[\text{Voltio: } 1\ \mathrm{V} = 1\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}}\right] \tag{1.51}$$

La **diferencia de potencial** entre dos puntos A y B se relaciona con el trabajo externo W^{ext}_{AB} (que es igual al trabajo que realiza el campo eléctrico para mover la carga de B a A) y con la integral de línea del campo eléctrico mediante:

$$V_B - V_A = \frac{W^{ext}_{A\to B}}{q} = -\frac{W^{campo}_{A\to B}}{q} = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \tag{1.52}$$

Equivalentemente, la caída de potencial de A a B y su relación diferencial son:

$$\boxed{V_A - V_B = -\int_A^B dV = \int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \iff -dV = \vec{E}\cdot d\vec{\ell} \iff E_\ell = -\frac{dV}{d\ell} \quad (\vec{E} = -\vec{\nabla}V)} \tag{1.53}$$

Ejercicio Resuelto: Potencial, Trabajo Externo y Energía Potencial — Ejercicio 19 de la Relación

Una carga positiva $q_1 = 6$ µC se encuentra fija en el origen de coordenadas. Calcular:

a) ¿Cuál es el potencial eléctrico en un punto P situado a una distancia de 4 m?

b) ¿Qué trabajo tenemos que hacer (fuerza externa) para traer otra carga positiva $q_2 = 2$ µC desde el infinito hasta esa distancia de 4 m?

c) ¿Cuál será la energía potencial eléctrica de esa segunda carga en dicha posición?

Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

a) Potencial eléctrico a $r = 4$ m:

$$V_P = K\frac{q_1}{r} = 9 \times 10^9 \cdot \frac{6 \times 10^{-6}}{4} = 13\,500 \text{ V} = 13{,}5 \text{ kV} \tag{1.54}$$

b) Trabajo externo para traer $q_2 = 2$ µC desde el infinito hasta P: El trabajo que realiza una fuerza externa desde el infinito hasta P ($W^{ext}_{\infty\to P}$) es igual al trabajo que realiza el campo eléctrico al llevar la carga desde P hasta el infinito ($W^{campo}_{P\to\infty}$):

$$W^{ext}_{\infty\to P} = W^{campo}_{P\to\infty} = q_2 \cdot V_P = K\frac{q_1 \cdot q_2}{r} = 9 \times 10^9 \cdot \frac{(6 \times 10^{-6}) \cdot (2 \times 10^{-6})}{4} = 0{,}027 \text{ J} \tag{1.55}$$

c) Energía potencial de q_2 en dicha posición: Por definición, la energía potencial electrostática en P coincide con el trabajo realizado desde el infinito:

$$U_P = W^{ext}_{\infty\to P} = 0{,}027 \text{ J} \tag{1.56}$$

1.1.8 Capacitores (Condensadores) y Capacitancia

Un **condensador** (o capacitor) es un dispositivo pasivo formado por dos conductores (denominados **placas** o **armaduras**) separados por un aislante (dieléctrico) o por el vacío a una determinada distancia d. Al aplicar una diferencia de potencial $V = V_+ - V_-$ entre las placas, éstas adquieren cargas de igual módulo y signo contrario ($+Q$ y $-Q$).

Definición: Capacitancia o Capacidad de un Condensador

La **capacitancia** o **capacidad** C de un condensador es el cociente entre la magnitud de la carga Q de una de sus placas y la diferencia de potencial V entre las dos placas:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad \left[\text{Faradio: } 1 \text{ F} = 1 \ \frac{\text{C}}{\text{V}}\right] \tag{1.57}$$

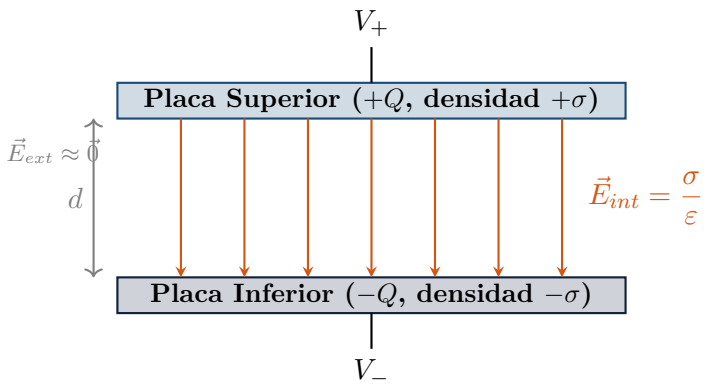
La capacidad **sólo depende de la geometría del condensador** y de la permitividad del aislante entre sus placas (no depende de Q ni de V). Para un **condensador de placas planas paralelas**, la capacidad es directamente proporcional al área A de cada placa e inversamente proporcional a la distancia d que las separa:

$$C = \varepsilon_0\frac{A}{d} \quad \text{(en el vacío)}, \qquad C = \varepsilon\frac{A}{d} = \varepsilon_r\varepsilon_0\frac{A}{d} \quad \text{(con dieléctrico de permitividad } \varepsilon) \tag{1.58}$$

El campo eléctrico dentro del condensador es uniforme e igual a $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$, mientras que en el exterior del condensador es prácticamente nulo. La energía electrostática

almacenada en el condensador es:

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}QV \qquad [\text{J}] \tag{1.59}$$



Ejercicio Resuelto: Deducción por Gauss del Campo y Capacidad de un Condensador Plano — Examen Febrero 2017 / Ejercicio 27

Calcular el campo eléctrico en el interior y exterior de un condensador de placas planas paralelas usando la Ley de Gauss, y deducir la expresión de su capacidad en función del área A de las placas y de la distancia d que las separa (para el caso en que el área de las placas es mucho mayor que la distancia que las separa).

Resolución Paso a Paso (Resuelto en clase y Examen Febrero 2017):

Paso 1: Campo eléctrico creado por una sola placa plana mediante la Ley de Gauss. Consideramos primero un único plano conductor/cargado con densidad superficial $\sigma = \frac{dQ}{dS} = \frac{Q_{enc}}{A}$ y tomamos un cilindro gaussiano perpendicular a la placa cuyas tapas tienen área A. Por simetría, el flujo sólo atraviesa las dos tapas horizontales (arriba y abajo, flujo $E \cdot 2A$) y no atraviesa la pared lateral ($\vec{E} \perp d\vec{S}_{lat}$):

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 2A = \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma \cdot A}{\varepsilon_0} \iff E_{placa} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tag{1.60}$$

El campo resultante de cada placa es uniforme y no depende de la distancia a la placa (siempre que la distancia sea mucho menor que las dimensiones de la placa).

Paso 2: Superposición de las dos placas del condensador ($+Q$ y $-Q$). En un condensador tenemos dos placas paralelas: la placa A cargada positivamente ($+\sigma$, cuyas líneas de campo $\vec{E}_A$ salen de ella hacia ambos lados) y la placa B cargada negativamente ($-\sigma$, cuyas líneas de campo $\vec{E}_B$ entran hacia ella desde ambos lados):

- **En el exterior del condensador** (a la izquierda de A y a la derecha de B): los vectores $\vec{E}_A$ y $\vec{E}_B$ tienen la misma dirección, el mismo módulo $\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$ y **sentidos opuestos**, por lo que **el campo eléctrico se anula en el exterior** ($E_{ext} = E_A - E_B = 0$).
- **En el interior del condensador** (entre ambas placas): tanto $\vec{E}_A$ como $\vec{E}_B$ apuntan desde la placa positiva A hacia la placa negativa B (**mismo sentido**), sumándose sus módulos:

$$E_{int} = E_A + E_B = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \implies \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}} \tag{1.61}$$

Paso 3: Deducción de la capacidad C en función de A y d. Calculamos primero la diferencia de potencial $V_A - V_B$ entre las placas integrando el campo uniforme a lo largo de la distancia d (donde $\vec{E}$ y $d\vec{\ell}$ llevan la misma dirección y sentido):

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = E \cdot d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d \tag{1.62}$$

Sustituyendo en la definición de capacidad $C = \frac{Q}{V_A - V_B}$ junto con $Q = \sigma \cdot A$:

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \frac{\sigma \cdot A}{\frac{\sigma}{\varepsilon_0} \cdot d} \implies \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 \cdot A}{d}} \tag{1.63}$$

Asociación de Condensadores en Paralelo y en Serie

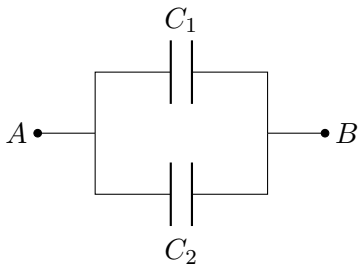
- **Asociación en Paralelo:** Todos los condensadores están sometidos a la misma diferencia de potencial ($V_1 = V_2 = V$). La carga total almacenada es la suma de las cargas individuales ($Q_{total} = Q_1 + Q_2 = C_1 V + C_2 V$), de modo que la capacidad equivalente es la suma de capacidades:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N = \sum_{i=1}^{N} C_i \tag{1.64}$$

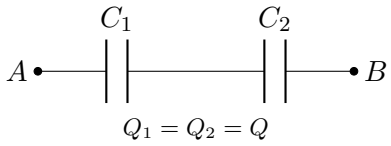
- **Asociación en Serie:** Por conservación de la carga en las armaduras intermedias aisladas, todos los condensadores en serie adquieren exactamente la misma carga ($Q_1 = Q_2 = Q$). La caída de tensión total es la suma de las tensiones de cada condensador ($V_{total} = V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$):

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_N} = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i} \implies C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad \text{(para dos condensadores)} \tag{1.65}$$

Asociación en Paralelo ($C_{eq} = C_1 + C_2$)



Asociación en Serie ($\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$)



1.2 Electrodinámica: Corriente Eléctrica y Campo Magnético

1.2.1 Corriente Eléctrica, Velocidad de Deriva y Ley de Ohm

La **corriente eléctrica** es el flujo ordenado de portadores de carga eléctrica a través de un material conductor, y se debe a la existencia de una diferencia de potencial eléctrico entre dos puntos. Al aplicar una diferencia de tensión ($V_1 > V_2$), se crea en el interior del conductor un campo eléctrico $\vec{E}$ (dirigido de mayor a menor potencial, de V_1 hacia V_2) que ejerce fuerza eléctrica sobre las cargas libres y las pone en movimiento:

- Si el portador tiene **carga positiva (+)**, se mueve en el **mismo sentido que** $\vec{E}$.

- Si el portador tiene **carga negativa (−)** (como los electrones en un metal), se mueve en **sentido contrario a** $\vec{E}$.
- **Convenio de signos de la corriente:** Por convenio histórico, el sentido de la intensidad de corriente eléctrica I se toma siempre igual al **mismo sentido del campo eléctrico** $\vec{E}$ (sentido del flujo de cargas positivas, opuesto al movimiento real de los electrones).

Definición: Intensidad de Corriente Eléctrica y Velocidad de Deriva

La medida de la corriente eléctrica es la **intensidad de corriente** I, definida como la cantidad de carga que atraviesa una sección transversal del conductor por unidad de tiempo:

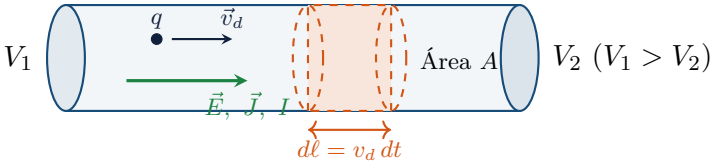
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \text{(corriente continua/uniforme)}, \qquad I = \frac{dQ}{dt} \quad \text{(corriente variable)} \qquad \left[\text{Amperio: } 1\ \text{A} = 1\ \frac{\text{C}}{\text{s}}\right] \tag{1.66}$$

Debido a los continuos choques entre los portadores de carga y los átomos de la red cristalina del material, los portadores avanzan con una velocidad media constante denominada **velocidad de deriva o de arrastre** (v_d). En un diferencial de cable de sección transversal A y grosor (rodaja) $d\ell = v_d\, dt$, la carga contenida es:

$$dQ = n \cdot q \cdot A \cdot d\ell = n \cdot q \cdot A \cdot (v_d\, dt) \tag{1.67}$$

donde n es la concentración de portadores de carga por unidad de volumen ($[\text{m}^{-3}]$) y q es la carga del electrón. Dividiendo por dt, obtenemos la relación entre la intensidad y la velocidad de deriva:

$$\boxed{I = \frac{dQ}{dt} = n \cdot q \cdot A \cdot \frac{d\ell}{dt} = n \cdot q \cdot v_d \cdot A} \tag{1.68}$$



Definición: Densidad de Corriente $\vec{J}$ y Conductividad Eléctrica σ

- **Densidad de corriente (J):** Es la intensidad de corriente I por unidad de área de sección transversal:

$$J = \frac{I}{A} = n \cdot q \cdot v_d \quad \left[\text{A/m}^2\right] \implies I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} \tag{1.69}$$

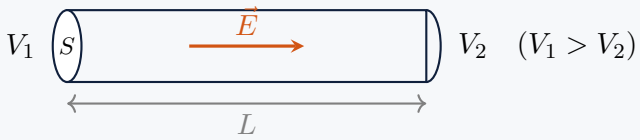
- **Relación entre J y el campo eléctrico E (Ley de Ohm microscópica):** En un material metálico u óhmico se cumple que la densidad de corriente es directamente proporcional al campo eléctrico:

$$\vec{J} = \sigma \cdot \vec{E} = \frac{1}{\rho}\vec{E} \tag{1.70}$$

donde σ es la **conductividad eléctrica** del material (medida de la capacidad de un material para dejar pasar la corriente eléctrica, en $[\Omega^{-1}\text{m}^{-1} \equiv \text{S/m}]$) y $\rho = \frac{1}{\sigma}$ es su inversa, la **resistividad eléctrica** ($[\Omega \cdot \text{m}]$).

Ejercicio Resuelto: Deducción Completa de la Ley de Ohm Macroscópica — Examen Enero 2019 (Ejercicio 2)

Deducir la Ley de Ohm (relación entre la diferencia de potencial $V_1 - V_2$ y la intensidad I en un conductor cilíndrico de longitud L y sección S), usando la relación de la densidad de corriente con el campo eléctrico ($J = \sigma E$) y la relación entre el campo eléctrico y el potencial, suponiendo campo eléctrico uniforme en todo el conductor.



Demostración Paso a Paso (Teoría y Examen Oficial FFT Enero 2019):

1. Tomamos un hilo conductor de longitud L y área de sección transversal S, sometido a potenciales $V_1 > V_2$, de modo que el campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ va hacia la derecha. La relación entre la densidad de corriente y el campo eléctrico es:

$$J = \sigma \cdot E \quad \text{(donde } \sigma \text{ es la conductividad del material)} \tag{1.71}$$

2. De la relación del campo eléctrico con la variación de potencial ($E = -\frac{dV}{d\ell}$), dado que el campo es uniforme a lo largo de la longitud L y la variación de potencial entre los extremos es $\Delta V = V_2 - V_1$, sacamos el valor del campo eléctrico en el conductor:

$$E = -\frac{\Delta V}{L} = \frac{-(V_2 - V_1)}{L} \implies E = \frac{V_1 - V_2}{L} \tag{1.72}$$

3. Volviendo a la primera ecuación, relacionamos la densidad de corriente con la caída de potencial:

$$J = \sigma \cdot \frac{V_1 - V_2}{L} \tag{1.73}$$

4. Calculamos ahora la intensidad de corriente I integrando la densidad de corriente sobre la sección transversal S:

$$I = \int_S J\, dS = \int_S \sigma \frac{V_1 - V_2}{L}\, dS = \sigma \frac{V_1 - V_2}{L} \cdot S = J \cdot S \tag{1.74}$$

5. Despejamos la caída de potencial $(V_1 - V_2)$ en función de la intensidad I, introduciendo la resistividad $\rho = \frac{1}{\sigma}$ (inversa de la conductividad):

$$I = \sigma \frac{S}{L}(V_1 - V_2) \iff V_1 - V_2 = \left(\frac{1}{\sigma}\frac{L}{S}\right) \cdot I = \left(\rho \frac{L}{S}\right) \cdot I \tag{1.75}$$

6. Definiendo la **resistencia eléctrica** del conductor como $R = \rho \frac{L}{S}$ (medida en ohmios, $[\Omega]$), obtenemos finalmente la **Ley de Ohm macroscópica**:

$$\boxed{R = \rho \frac{L}{S} \qquad \implies \qquad V_1 - V_2 = R \cdot I} \tag{1.76}$$

Importante / Ojo Examen: Dependencia con la Temperatura y Potencia Disipada (Efecto Joule)

- **Variación térmica de la resistividad:** En los metales conductores, al aumentar la temperatura se incrementa la agitación térmica y los choques, aumentando la resistividad según $\rho(T) = \rho_0[1 + \alpha(T - T_0)] \implies R(T) = R_0[1 + \alpha(T - T_0)]$.
- **Efecto Joule y Potencia Eléctrica:** La potencia eléctrica disipada en forma de calor en una resistencia R recorrida por una corriente I con caída de tensión V es:

$$P = V \cdot I = I^2 \cdot R = \frac{V^2}{R} \qquad [\mathrm{W} = \mathrm{J/s}] \tag{1.77}$$

Ejercicio Resuelto: Corriente y Campo Eléctrico en una Resistencia de Plomo — Ejercicio 30 de la Relación

Calcular la intensidad de corriente que circula por una resistencia de plomo ($\rho = 2{,}2 \times 10^{-7}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$) con forma de paralelepípedo, con sección transversal de $S = 5 \times 10^{-4}\ \mathrm{mm}^2$ y longitud de $L = 3$ cm, cuando se aplica una diferencia de potencial de $V_1 - V_2 = 5$ V. ¿Cuánto vale el campo eléctrico en el interior de la resistencia? Indicar su módulo, dirección y sentido.

Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

1) Conversión de datos al Sistema Internacional:

$$V_1 - V_2 = 5\ \mathrm{V}, \quad S = 5\times10^{-4}\,\mathrm{mm}^2 = 5\times10^{-10}\,\mathrm{m}^2, \quad L = 3\,\mathrm{cm} = 0{,}03\,\mathrm{m}, \quad \rho = 2{,}2\times10^{-7}\,\Omega\cdot\mathrm{m} \tag{1.78}$$

2) Cálculo de la resistencia R y de la intensidad I (Ley de Ohm):

$$R = \rho\frac{L}{S} = (2{,}2\times10^{-7}\,\Omega\cdot\mathrm{m})\cdot\frac{0{,}03\ \mathrm{m}}{5\times10^{-10}\ \mathrm{m}^2} = 13{,}2\,\Omega \quad \text{(en el cuaderno se redondea a } 13{,}26\,\Omega) \tag{1.79}$$

$$(V_1 - V_2) = R\cdot I \implies I = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{5\ \mathrm{V}}{13{,}2\ \Omega} = 0{,}3788\ \mathrm{A} \quad (\text{con } 13{,}26\ \Omega \implies I = 0{,}377\ \mathrm{A}) \tag{1.80}$$

3) Cálculo del campo eléctrico en el interior (por dos métodos equivalentes):

- **Primera forma (usando la Ley de Ohm microscópica $J = \sigma E$):**

$$J = \sigma E \implies E = \frac{J}{\sigma} = J\cdot\rho = \frac{I}{S}\cdot\rho = \frac{0{,}3788}{5\times10^{-10}}\cdot(2{,}2\times10^{-7}) = 166{,}67\ \mathrm{V/m} \tag{1.81}$$

- **Segunda forma (usando la relación potencial–campo uniforme):**

$$E = \frac{V_1 - V_2}{L} = \frac{5\ \mathrm{V}}{0{,}03\ \mathrm{m}} = 166{,}67\ \mathrm{V/m} \tag{1.82}$$

La dirección del campo eléctrico $\vec{E}$ es paralela al eje longitudinal del paralelepípedo y su sentido va desde el extremo de mayor potencial (V_1) hacia el de menor potencial (V_2).

1.2.2 Campo Magnético y Ley de Lorentz

1.2.12. Campo Magnético ($\vec{B}$)

Un **campo magnético** es un campo de fuerzas creado por imanes permanentes o por cargas eléctricas en movimiento (corrientes eléctricas). También es llamado **inducción magnética**, se representa con la letra $\vec{B}$ y se mide en el Sistema Internacional en **Teslas** (T):

$$1\ \mathrm{T} = 1\ \mathrm{N}\cdot\mathrm{s}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{C}^{-1} = 1\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}} = 10^4\ \text{Gauss (G)} \iff 1\ \text{Gauss} = 10^{-4}\ \mathrm{T} \tag{1.83}$$

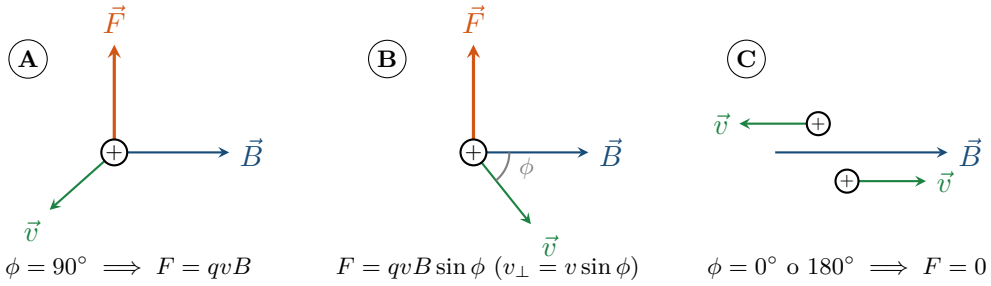
Se cumplen dos principios fundamentales de interacción magnética:

1. Una carga en movimiento o una corriente eléctrica **crea** un campo magnético en el espacio circundante.

2. Una carga en movimiento o una corriente eléctrica inmersa en un campo magnético $\vec{B}$ **experimenta una fuerza magnética** perpendicular tanto a la velocidad de movimiento de la carga como al propio campo magnético:

$$\vec{F}_B = q\cdot(\vec{v}\times\vec{B}) \implies |\vec{F}_B| = |q|\cdot v\cdot B\cdot\sin(\phi) \tag{1.84}$$

donde ϕ es el ángulo que forma el vector velocidad $\vec{v}$ con el vector campo magnético $\vec{B}$ ($v_\perp = v\sin\phi$).



$\phi = 90° \implies F = qvB$ $\quad$ $F = qvB\sin\phi$ $(v_\perp = v\sin\phi)$ $\quad$ $\phi = 0°$ o $180° \implies F = 0$

1.2.13. Ley de Lorentz y Fuerza Magnética sobre un Cable Conductor

Ley / Teorema: Ley de Lorentz Generalizada y Movimiento Ciclotrónico

La fuerza electromagnética total que experimenta una carga q que se mueve con velocidad $\vec{v}$ en presencia simultánea de un campo eléctrico $\vec{E}$ y un campo magnético $\vec{B}$ viene dada por la **Ecuación de Lorentz**:

$$\vec{F} = q\cdot(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}) \tag{1.85}$$

- **Ausencia de trabajo magnético:** Como $\vec{F}_B \perp \vec{v}$, la potencia magnética es nula ($P = \vec{F}_B\cdot\vec{v} = 0$) y el campo magnético estático **no realiza trabajo** ($W_B = 0$), manteniendo constante el módulo de la velocidad y la energía cinética de la partícula.

- **Radio de ciclotrón:** Cuando una partícula de masa m y carga q penetra perpendicularmente ($\vec{v}\perp\vec{B}$) en un campo magnético uniforme, describe un movimiento circular uniforme de radio R y frecuencia angular ω_c:

$$|q|vB = m\frac{v^2}{R} \implies R = \frac{mv}{|q|B}, \qquad \omega_c = \frac{|q|B}{m}, \qquad T = \frac{2\pi m}{|q|B} \tag{1.86}$$

Ley / Teorema: Fuerza que Ejerce un Campo Magnético sobre un Cable Conductor

Un cable conductor rectilíneo de longitud L por el cual circula una corriente eléctrica I dentro de un campo magnético uniforme $\vec{B}$ se ve sometido a una fuerza magnética. Para deducirla, consideramos primero un trozo elemental de cable de longitud $d\ell$ y sección A, el cual contiene una carga en movimiento $dQ = nqA\,d\ell$ desplazándose con velocidad $\vec{v}_d$:

$$d\vec{F} = dQ \cdot (\vec{v}_d \times \vec{B}) = (nqA\,d\ell)\,\vec{v}_d \times \vec{B} \tag{1.87}$$

En módulo, recordando que la intensidad es $I = nqAv_d$:

$$dF = nqAv_d\,d\ell\,B\sin(\phi) = I\,d\ell\,B\sin(\phi) \implies d\vec{F} = I\,d\vec{\ell} \times \vec{B} \tag{1.88}$$

Integrando para un cable rectilíneo de longitud L (representado por el vector $\vec{\ell}$ de módulo L y sentido el de la intensidad I):

$$\boxed{\vec{F} = I \cdot (\vec{\ell} \times \vec{B}) \qquad \Longrightarrow \qquad F = I \cdot L \cdot B \cdot \sin(\phi)} \tag{1.89}$$

donde ϕ es el ángulo que forma el sentido de la corriente I con el campo magnético $\vec{B}$. En particular, **si el campo magnético es perpendicular al cable** ($\phi = 90°$), la fuerza es máxima: $F = I \cdot L \cdot B$.

1.2.3 Ley de Biot y Savart y Aplicaciones Fundamentales

Campo Magnético de una Carga en Movimiento y de un Elemento de Corriente

1. **Campo magnético de una carga puntual en movimiento:** Una carga q que se desplaza a velocidad $\vec{v}$ crea en un punto P situado a posición $\vec{r}$ un campo magnético cuyas líneas de campo son círculos concéntricos centrados en la línea de movimiento de la carga (siendo $B = 0$ a lo largo de la propia línea de movimiento):

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{q(\vec{v} \times \hat{r})}{r^2} \implies B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{|q| \cdot v \cdot \sin(\phi)}{r^2} \tag{1.90}$$

   donde $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T · m/A es la **permeabilidad magnética del vacío**.

2. **Campo magnético de un elemento de corriente (Ley de Biot y Savart):** En un trozo de cable de longitud $d\ell$ y sección A tenemos una carga portadora $dQ = nqA\,d\ell$. Sustituyendo en la expresión anterior y usando la definición de intensidad $I = nqv_dA$:

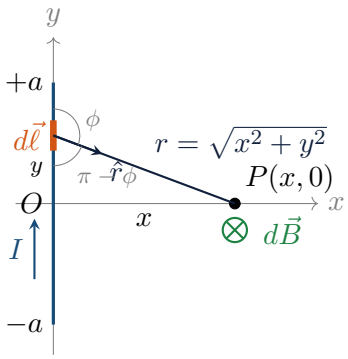
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{(nqA\,d\ell) \cdot v_d \cdot \sin(\phi)}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I \cdot d\ell \cdot \sin(\phi)}{r^2} \tag{1.91}$$

   En forma vectorial, obtenemos la **Ley de Biot y Savart**:

$$\boxed{d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I(d\vec{\ell} \times \hat{r})}{r^2}} \tag{1.92}$$

Campo Magnético de un Cable Rectilíneo de Longitud $2a$ e Infinito

Consideremos un cable rectilíneo dispuesto sobre el eje Y desde $y = -a$ hasta $y = +a$ (longitud total $2a$) recorrido por una corriente I, y calculemos el campo magnético en un punto $P(x, 0)$ a distancia perpendicular x sobre la mediatriz del cable.

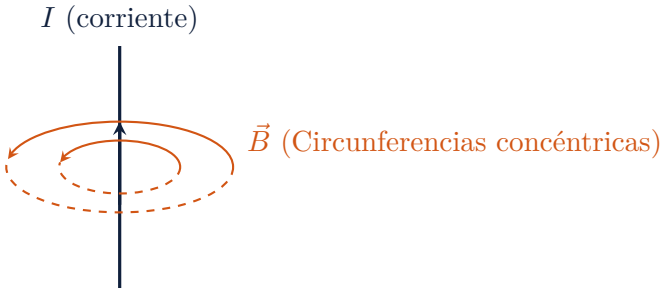


Integrando la expresión de Biot y Savart entre $y = -a$ e $y = +a$, con $r = \sqrt{x^2+y^2}$ y $\sin(\phi) = \sin(\pi - \phi) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\sin(\phi)\,dy}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{x\,dy}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\left[\frac{y}{x\sqrt{x^2+y^2}}\right]_{-a}^{a} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2a}{x(x^2+a^2)^{1/2}} \tag{1.93}$$

Por tanto, en el límite de un **conductor rectilíneo muy largo o infinito** ($a \gg x$), donde $\sqrt{x^2+a^2} \approx a$, las longitudes a se simplifican y obtenemos la célebre expresión a una distancia radial x (o r) del hilo:

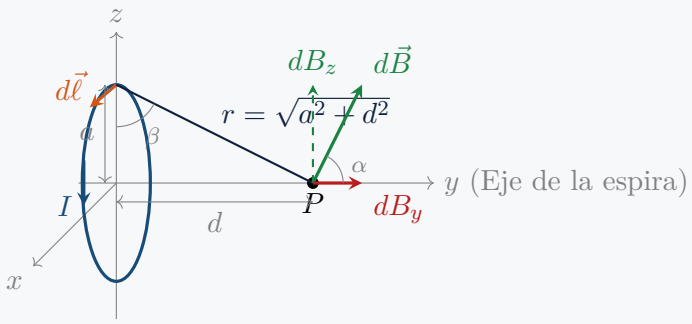
$$\boxed{\text{Si } a \gg x \implies B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \equiv \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \tag{1.94}$$



Sentido de $\vec{B}$ según la Regla de la Mano Derecha (pulgar con I, dedos con $\vec{B}$)

Ejercicio Resuelto: Campo Magnético de una Espira Circular en su Eje y en su Centro — Ejercicio 32 de la Relación

Calcular mediante la Ley de Biot y Savart el campo magnético creado por un hilo conductor circular (espira de radio a) por el que circula una corriente I, tanto en un punto P de su eje situado a una distancia d del centro como en el propio centro de la espira ($d = 0$).



Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

1. Situamos la espira de radio a en el plano XZ centrada en el origen, y calculamos el campo en el punto $P(0, d, 0)$ sobre el eje Y. Por la geometría circular, el vector tangente a la espira $d\vec{\ell}$ y el vector unitario $\hat{r}$ que va hacia P son siempre **perpendiculares entre sí** ($d\vec{\ell} \perp \hat{r} \implies \theta = 90°$, $\sin 90° = 1$ y $|\hat{r}| = 1$). Por tanto, el módulo del diferencial de campo es:

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0 I\, |d\vec{\ell}|\, |\hat{r}|\, \sin(90°)}{4\pi r^2} = \frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi r^2} \tag{1.95}$$

2. El vector $d\vec{B}$ es perpendicular al plano que forman $d\vec{\ell}$ y $\hat{r}$. Al recorrer toda la espira, por la simetría axial del problema, todas las componentes perpendiculares al eje (dB_x y dB_z) se anulan dos a dos, quedando únicamente la **componente a lo largo del eje** Y (dB_y):

$$dB_y = dB \cdot \cos(\alpha) = dB \cdot \sin(\beta) \tag{1.96}$$

En el triángulo rectángulo formado por el radio a, la distancia axial d y la hipotenusa $r = \sqrt{a^2 + d^2}$, se cumple que $\sin(\beta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2+d^2}}$. Sustituyendo:

$$dB_y = dB \cdot \frac{a}{r} = \frac{\mu_0 I\, d\ell}{4\pi(\sqrt{a^2 + d^2})^2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + d^2}} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(a^2 + d^2)^{3/2}}\, d\ell \tag{1.97}$$

3. Integrando a lo largo de toda la espira, como $\mu_0, I, 4\pi, a, d$ son constantes, sólo integramos la longitud de la circunferencia $\oint d\ell = 2\pi a$:

$$B_y = \oint dB_y = \frac{\mu_0 I a}{4\pi(a^2 + d^2)^{3/2}} \oint d\ell = \frac{\mu_0 I a \cdot (2\pi a)}{4\pi(a^2 + d^2)^{3/2}} \implies \boxed{B_{eje}(d) = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + d^2)^{3/2}}} \tag{1.98}$$

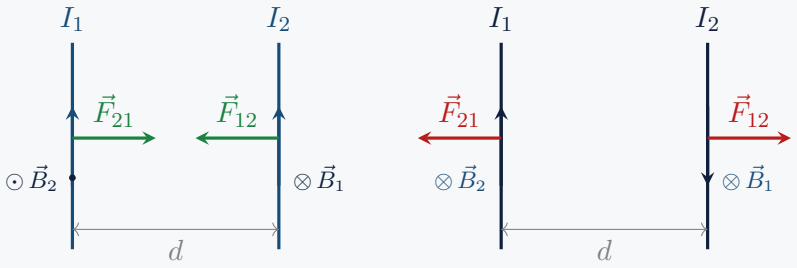
4. Caso particular en el centro de la espira ($d = 0$): Si el punto P está situado exactamente en el centro de la espira ($d = 0$), obtenemos:

$$\boxed{\text{Si } d = 0 \implies B_{centro} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2a}} \tag{1.99}$$

Fuerza Magnética entre Dos Conductores Paralelos

Ejercicio Resuelto: Demostración de las Fuerzas entre Dos Cables Paralelos — Exámenes Febrero 2017 y Enero 2019 / Ejercicio 33

Demostrar que el módulo de la fuerza magnética por unidad de longitud entre dos corrientes rectilíneas paralelas indefinidas por las que circulan intensidades I_1 e I_2 separadas una distancia d es $\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$, y explicar razonadamente qué fuerzas aparecen cuando las corrientes circulan: a) en el mismo sentido, y b) en sentidos contrarios.



a) Mismo sentido: Se atraen b) Sentidos contrarios: Se repelen

Demostración Paso a Paso (Teoría y Exámenes Febrero 2017 / Enero 2019):

1. Cálculo del módulo de la fuerza mutua: Cada conductor rectilíneo genera a una distancia d (donde se sitúa el otro conductor) un campo magnético circular cuyo módulo viene dado por la ley de Biot-Savart/Ampère:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \quad \text{(en la posición del hilo 2)}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} \quad \text{(en la posición del hilo 1)} \tag{1.100}$$

Dado que el campo magnético $\vec{B}_1$ es perpendicular al conductor 2 ($\phi = 90° \implies \sin 90° = 1$), la fuerza magnética $F = ILB\sin\phi$ que ejerce el conductor 1 sobre una longitud L del conductor 2 (y recíprocamente el 2 sobre el 1) es:

$$F_{12} = I_2 \cdot L \cdot B_1 = I_2 \cdot L \cdot \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d}, \qquad F_{21} = I_1 \cdot L \cdot B_2 = I_1 \cdot L \cdot \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d} = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d} \tag{1.101}$$

Ambas fuerzas tienen idéntico módulo, y la fuerza por unidad de longitud es:

$$\boxed{\frac{F}{L} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}} \tag{1.102}$$

2. Dirección y sentido de las fuerzas (Regla de la Mano Derecha):

- **a) Corrientes en el mismo sentido:** Por la regla de la mano derecha, el hilo 1 crea sobre el hilo 2 un campo $\vec{B}_1$ entrante ($\otimes$), por lo que la fuerza $\vec{F}_{12} = I_2\vec{L}_2 \times \vec{B}_1$ apunta hacia la izquierda (hacia el hilo 1). Análogamente, el hilo 2 crea sobre el hilo 1 un campo $\vec{B}_2$ saliente ($\odot$), y la fuerza $\vec{F}_{21}$ apunta hacia la derecha (hacia el hilo 2). Conclusión: **Si las corrientes van en el mismo sentido, los dos conductores se atraen**.
- **b) Corrientes en sentidos contrarios:** Al invertir el sentido de I_2, se invierte el producto vectorial $\vec{F}_{12} = I_2\vec{L}_2 \times \vec{B}_1$ (apunta hacia la derecha, alejándose de 1) y también se invierte el sentido de $\vec{B}_2$ (entrante $\otimes$ sobre 1, haciendo que $\vec{F}_{21}$ apunte hacia la izquierda). Conclusión: **Si las corrientes van en sentidos contrarios, los dos conductores se repelen**.

Ejercicio Resuelto: Campo Magnético de Dos Conductores Paralelos en Distintos Puntos — Ejercicio 34 de la Relación

Dos conductores fijos rectilíneos y paralelos de gran longitud A y C distan entre sí 10 cm. Por el conductor A circula una corriente $I_1 = 10$ A y por el C una corriente $I_2 = 15$ A en el mismo sentido (hacia arriba). Hallar la inducción magnética resultante $\vec{B}_{total}$ en los siguientes puntos del plano de los conductores:

a) En un punto P_1 situado a 5 cm a la izquierda de A y a 15 cm de C.

b) En el punto medio P_2 equidistante de ambos conductores (5 cm de A y 5 cm de C).

c) En un punto P_3 situado a 15 cm de A y a 5 cm a la derecha de C.

Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

Aplicando la regla de la mano derecha a una corriente vertical hacia arriba, el campo magnético **sale del papel** ($\odot$) a la izquierda del conductor y **entra al papel** ($\otimes$) a la derecha del conductor.

a) En el punto P_1 ($x_1 = 0{,}05$ m a la izquierda de A, $x_2 = 0{,}15$ m a la izquierda de C): Como P_1 está a la izquierda de ambos conductores, tanto $\vec{B}_1$ como $\vec{B}_2$ tienen el mismo sentido (salientes $\odot$), por lo que se suman sus módulos:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x_1} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} = 4{\times}10^{-5}\ \text{T}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi x_2} = \frac{4\pi \times 10^{-7} \cdot 15}{2\pi \cdot 0{,}15} = 2{\times}10^{-5}\ \text{T} \tag{1.103}$$

$$B_{total}(P_1) = B_1 + B_2 = (4+2) \times 10^{-5} = 6 \times 10^{-5}\ \text{T} \quad (\text{saliente } \odot) \tag{1.104}$$

b) En el punto medio P_2 ($x_1 = 0{,}05$ m a la derecha de A, $x_2 = 0{,}05$ m a la izquierda de C): Entre los dos cables, $\vec{B}_1$ es entrante ($\otimes$) y $\vec{B}_2$ es saliente ($\odot$). Como tienen sentidos opuestos, sus módulos se restan:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}05} = 4 \times 10^{-5}\ \text{T}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 \cdot 15}{2\pi \cdot 0{,}05} = 6 \times 10^{-5}\ \text{T} \tag{1.105}$$

$$B_{total}(P_2) = B_1 - B_2 = -2{\times}10^{-5}\ \text{T} \implies |\vec{B}_{total}(P_2)| = 2{\times}10^{-5}\ \text{T} \quad (\text{predomina } \vec{B}_2 \text{ saliente } \odot) \tag{1.106}$$

c) En el punto P_3 ($x_1 = 0{,}15$ m a la derecha de A, $x_2 = 0{,}05$ m a la derecha de C): Como P_3 está a la derecha de ambos conductores, tanto $\vec{B}_1$ como $\vec{B}_2$ son entrantes ($\otimes$) y se suman:

$$B_1 = \frac{\mu_0 \cdot 10}{2\pi \cdot 0{,}15} = 1{,}\hat{3} \times 10^{-5}\ \text{T}, \qquad B_2 = \frac{\mu_0 \cdot 15}{2\pi \cdot 0{,}05} = 6 \times 10^{-5}\ \text{T} \tag{1.107}$$

$$B_{total}(P_3) = B_1 + B_2 = 7{,}\hat{3} \times 10^{-5}\ \text{T} \quad (\text{entrante } \otimes) \tag{1.108}$$

1.2.4 Flujo de Campo Magnético y Ley de Ampère

1.2.15. Flujo de Campo Magnético (Φ_B)

Definición: Flujo Magnético y Ley de Gauss del Magnetismo

El **flujo de campo magnético** Φ_B a través de una superficie S mide la cantidad neta de magnetismo (líneas de campo $\vec{B}$) que atraviesa dicha superficie. Su unidad en el SI es el **Weber** (Wb), donde $1\ \text{Wb} = 1\ \text{T} \cdot \text{m}^2$:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_S B \cos(\theta)\, dS \qquad \left(\text{si } \vec{B} \text{ es uniforme y } S \text{ plana: } \Phi_B = B \cdot S \cdot \cos\theta\right) \tag{1.109}$$

Flujo magnético a través de una superficie cerrada: Dado que no existen polos magnéticos aislados (monopolos magnéticos) y todas las líneas de campo magnético son curvas cerradas, el flujo magnético a través de cualquier superficie cerrada es siempre nulo:

$$\boxed{\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0} \tag{1.110}$$

1.2.16. Ley de Ampère

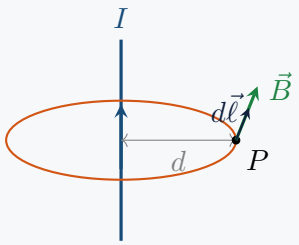
Ley / Teorema: Ley de Ampère

La circulación del campo magnético $\vec{B}$ a lo largo de una línea cerrada C (curva amperiana) es directamente proporcional a la intensidad de corriente neta I que corta o atraviesa la superficie limitada por esa línea cerrada:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \cdot I_{encerrada} \tag{1.111}$$

Ejercicio Resuelto: Cálculo del Campo Magnético de un Hilo Infinito por la Ley de Ampère — Ejercicio 31 de la Relación

Calcular aplicando la Ley de Ampère el campo magnético creado por un hilo conductor rectilíneo infinito de radio despreciable a por el que circula una corriente I, a una distancia d de su centro.



Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

Aplicamos la Ley de Ampère tomando como línea cerrada una circunferencia concéntrica con el hilo de radio d que pasa por el punto P. En todos los puntos de dicha circunferencia:

1. Los vectores $\vec{B}$ y $d\vec{\ell}$ son tangentes a la circunferencia y llevan la **misma dirección y sentido** ($\theta = 0° \implies \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B\, d\ell$, producto de módulos).

2. El módulo B es **constante** en toda la curva por estar todos sus puntos a la misma distancia d del hilo, por lo que sale fuera de la integral.

3. La integral $\oint d\ell$ es simplemente el perímetro o longitud de la circunferencia de radio d, que vale $2\pi d$.

Por tanto:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint B\, d\ell = B \oint d\ell = B \cdot (2\pi d) = \mu_0 I \iff \boxed{B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi d}} \tag{1.112}$$

Nota adicional: Si el cable cilíndrico tiene radio finito a con corriente uniformemente distribuida en su sección ($J = \frac{I}{\pi a^2}$), para un punto exterior ($d \geq a$) se encierra toda la corriente y $B_{ext} = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$, mientras que para un punto en el interior del cable ($d < a$) la corriente encerrada es $I_{enc} = I\frac{\pi d^2}{\pi a^2} = I\frac{d^2}{a^2}$, resultando $B_{int}(d) = \frac{\mu_0 I d}{2\pi a^2}$.

1.2.5 Inducción Electromagnética: Ley de Faraday y Ley de Lenz

Se puede inducir una corriente eléctrica en una espira o circuito cerrado mediante el uso de campos magnéticos variables en el tiempo. Cuando varía el flujo del campo magnético $\Phi_B = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA\cos\phi$ que atraviesa la superficie limitada por una espira, aparece en ella una **fuerza electromotriz inducida** $\mathcal{E}$ (f.e.m., medida en voltios [V]) que pone en movimiento las cargas en el circuito.

Ley / Teorema: Ley de Faraday-Lenz

La fuerza electromotriz inducida $\mathcal{E}$ en una espira es igual a la derivada temporal del flujo magnético cambiada de signo (y multiplicada por N si se trata de una bobina de N espiras):

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (1 \text{ espira}), \qquad \mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} \quad (N \text{ espiras}) \tag{1.113}$$

Criterio de sentido de la Ley de Lenz: La corriente inducida se opone siempre a la causa (variación de flujo magnético) que la produce:

- **Si el flujo magnético aumenta ($\Delta\Phi_B > 0$):** Aparece una f.e.m. que provoca una corriente inducida cuyo campo magnético propio B_{ind} tiene **sentido opuesto** al campo externo $\vec{B}$ para contrarrestar el aumento (ej. si $\vec{B}$ apunta hacia arriba y crece, la corriente inducida gira en **sentido horario** vista desde arriba; si $\vec{B}$ es entrante $\otimes$ y aumenta, la corriente inducida es **antihoraria**).
- **Si el flujo magnético disminuye ($\Delta\Phi_B < 0$):** Aparece una f.e.m. que provoca una corriente inducida cuyo campo magnético propio B_{ind} tiene el **mismo sentido** que el campo externo $\vec{B}$ para oponerse a la disminución (ej. si $\vec{B}$ apunta hacia arriba y decrece, la corriente inducida gira en **sentido antihorario** vista desde arriba; si $\vec{B}$ es entrante $\otimes$ y disminuye, la corriente inducida es **horaria**).



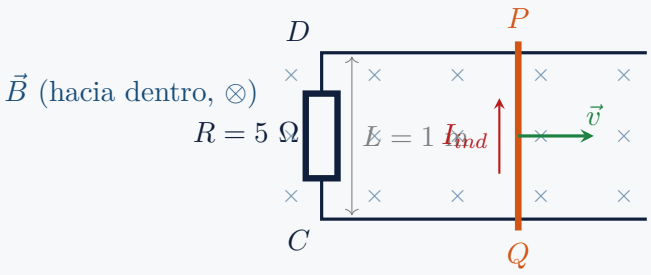
Ejercicio Resuelto: Barra Conductora Móvil sobre Raíl en Forma de U — Ejercicio 38 de la Relación

Sobre un hilo conductor en forma de U como el de la figura se desplaza hacia la derecha una barra conductora móvil PQ de longitud $L = 1$ m y resistencia eléctrica $R = 5\ \Omega$. Dicho montaje se encuentra inmerso en un campo magnético uniforme entrante al papel ($\otimes$) de valor $B = 100$ Gauss ($10\,000$ Gauss $= 1$ T).

a) Calcular la fuerza electromotriz inducida en el circuito cuando la barra se desplaza hacia la derecha a una velocidad constante de $v = 1$ m/s.

b) Calcular la intensidad de corriente que pasa por la barra móvil e indicar razonadamente el sentido de la corriente inducida.

c) ¿En qué cambiaría el problema si el movimiento de la barra fuese en sentido contrario (hacia la izquierda)?



Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

a) Fuerza electromotriz inducida: En primer lugar pasamos el campo magnético a Teslas: $B = 100$ Gauss $= 0{,}01$ T. Al desplazarse la barra hacia la derecha una distancia $d\ell = v\,dt$, aumenta la superficie encerrada por el circuito en $dS = L \cdot d\ell = L \cdot v\,dt$, por lo que aumenta el flujo magnético:

$$d\Phi_B = B \cdot dS = B \cdot L \cdot d\ell = B \cdot L \cdot v\,dt \tag{1.114}$$

Aplicando la Ley de Faraday:

$$\mathcal{E} = \text{f.e.m.} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B{\cdot}L{\cdot}v = -(0{,}01\ \text{T}){\cdot}(1\ \text{m}){\cdot}(1\ \text{m/s}) \implies \boxed{\mathcal{E} = -0{,}01\ \text{V} \quad (|\mathcal{E}| = 0{,}01\ \text{V})} \tag{1.115}$$

b) Intensidad de corriente y sentido (Ley de Lenz): Como la resistencia del circuito es $R = 5\ \Omega$, la magnitud de la corriente inducida es:

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{0{,}01\ \text{V}}{5\ \Omega} = 0{,}002\ \text{A} = 2\ \text{mA} \tag{1.116}$$

Como el campo externo $\vec{B}$ es entrante ($\otimes$) y el flujo Φ_B **aumenta** al crecer el área, por la Ley de Lenz la corriente inducida debe crear un campo magnético saliente ($\odot$) que se oponga a dicho aumento. Por la regla de la mano derecha, **el sentido de la corriente inducida es antihorario** (sube por la barra de Q hacia P).

c) Movimiento en sentido contrario (hacia la izquierda): Al moverse la barra hacia la izquierda disminuiría el área encerrada y, por tanto, disminuiría el flujo de campo magnético entrante ($\Delta\Phi_B < 0$), apareciendo una fuerza electromotriz de signo opuesto (+0,01 V) y una **corriente inducida en sentido horario** (para crear campo entrante $\otimes$ que contrarreste la pérdida de flujo).

Ejercicio Resuelto: Bobina que Gira en un Campo Magnético Uniforme (Generador Alterno) — Ejercicio 39 de la Relación

Una bobina plana de $N = 50$ espiras de $A = 200$ cm^2 cada una gira alrededor de un eje contenido en su plano con una velocidad constante de $\nu = 300$ rpm perpendicularmente a un campo magnético uniforme de $B = 0{,}5$ T. Hallar la expresión de la fuerza electromotriz inducida $\mathcal{E}(t)$.

Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

1) Datos en el SI y cálculo de la velocidad angular de giro ω: Tenemos $N = 50$ espiras, $S = A = 200$ cm^2 $= 0{,}02$ m^2 y $B = 0{,}5$ T. Como la bobina da 300 vueltas en un minuto (60 s), el periodo T (tiempo que tarda en dar 1 vuelta) y la velocidad angular $\omega = \frac{2\pi}{T}$ son:

$$T = \frac{60 \text{ s}}{300 \text{ vueltas}} = 0{,}2 \text{ s} \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}2} = 10\pi \text{ rad/s} \tag{1.117}$$

2) Flujo magnético y derivación mediante la Ley de Faraday: Al girar la bobina, el ángulo entre el vector campo magnético $\vec{B}$ y el vector superficie $\vec{S}$ varía con el tiempo según $\phi(t) = \omega t = 10\pi t$. El flujo que atraviesa cada espira es:

$$\Phi_B(t) = \vec{B} \cdot \vec{S} = B \cdot S \cdot \cos(\phi) = B \cdot S \cdot \cos(10\pi t) \tag{1.118}$$

Derivando respecto al tiempo para las N espiras, se obtiene una **señal de tensión alterna sinusoidal**:

$$\mathcal{E}(t) = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -N{\cdot}B{\cdot}S\frac{d\cos(10\pi t)}{dt} = -N{\cdot}B{\cdot}S{\cdot}(-10\pi\sin(10\pi t)) = N{\cdot}B{\cdot}S{\cdot}10\pi\sin(10\pi t) \tag{1.119}$$

Sustituyendo los valores numéricos ($50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}02 = 0{,}5$):

$$\mathcal{E}(t) = 50 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}02 \cdot 10\pi\sin(10\pi t) \implies \boxed{\mathcal{E}(t) = 5\pi\sin(10\pi t) \text{ V}} \tag{1.120}$$

1.2.6 Fenómenos de Autoinducción: Bobina o Solenoide

Ley / Teorema: Campo Magnético e Inductancia de una Bobina o Solenoide

1. **Campo magnético interior de una bobina o solenoide:** Aplicando la Ley de Ampère a un solenoide de longitud L formado por N espiras o vueltas por el que pasa una intensidad I, el campo magnético generado en su interior es uniforme y vale:

$$B = \frac{\mu_0 N I}{L} = \mu_0 n I, \qquad \text{siendo } n = \frac{N}{L} \text{ el número de espiras por unidad de longitud} \tag{1.121}$$

2. **Bobina con corriente variable / alterna (Autoinducción):** Cuando por una bobina circula una corriente que varía con el tiempo $I(t)$, se provoca un flujo magnético variable en la propia bobina. Por la Ley de Lenz, esta variación de flujo hace que aparezca una fuerza electromotriz autoinducida ($\mathcal{E}$) que **se opone a las variaciones de corriente**:

   - Si la corriente I está **en aumento** ($dI/dt > 0$), la f.e.m. de la Ley de Lenz se opone al incremento polarizando positivamente el terminal de entrada.
   - Si la corriente I está **disminuyendo** ($dI/dt < 0$), la f.e.m. invierte su polaridad tratando de mantener la corriente.

3. **Inductancia o Coeficiente de Autoinducción (L):** Es una medida de la oposición de un inductor o bobina a un cambio de corriente, y se define como:

$$L = \frac{N \cdot \Phi_B}{I} \qquad \left[\text{Unidad de autoinductancia: Henrio (H)} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}}\right] \tag{1.122}$$

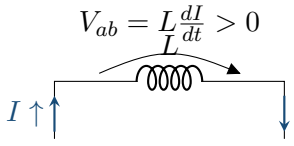
   Sustituyendo el flujo de un solenoide ($\Phi_B = B \cdot A = \frac{\mu_0 N I}{\ell} A$), su inductancia geométrica es $L = \frac{\mu_0 N^2 A}{\ell}$.

4. **Relación entre la caída de tensión y la corriente en una bobina:** Derivando $N\Phi_B = LI$ respecto al tiempo:

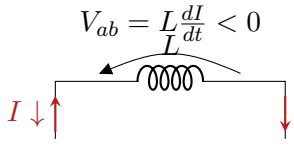
$$N\frac{d\Phi_B}{dt} = L\frac{dI}{dt} \implies \mathcal{E} = -N\frac{d\Phi_B}{dt} = -L\frac{dI}{dt} \tag{1.123}$$

   La caída de tensión entre los terminales a y b de la bobina (en el sentido de la corriente I) y la energía magnética almacenada son:

$$\boxed{V_{ab} = V_a - V_b = L\frac{dI}{dt}}, \qquad U_B = \frac{1}{2}LI^2 \text{ [J]} \tag{1.124}$$



a) I en aumento: f.e.m. se opone al aumento



b) I disminuyendo: f.e.m. invierte su signo

Ejercicio Resuelto: F.e.m. Inducida y Autoinducción de una Bobina — Ejercicio 37 de la Relación

Por una bobina de $N = 1000$ espiras circula una corriente constante de $I = 5$ A que produce un flujo magnético de $\Phi_B = 10^{-4}$ Wb en cada espira. Calcular:

a) El valor medio de la f.e.m. inducida si se interrumpe la corriente en $\Delta t = 0{,}02$ s.

b) La autoinducción (inductancia L) de la bobina.

Resolución Paso a Paso (Corregido en clase):

a) Valor medio de la f.e.m. al cortar la corriente: Si se corta la corriente pasamos de tener un flujo inicial $\Phi_{B,inicial} = 10^{-4}$ Wb a un flujo final nulo $\Phi_{B,final} = 0$ Wb, luego la variación de flujo es $\Delta\Phi_B = \Phi_{B,final} - \Phi_{B,inicial} = 0 - 10^{-4} = -10^{-4}$ Wb. Aplicando la Ley de Faraday:

$$\mathcal{E} = \text{f.e.m.} = -N\frac{\Delta\Phi_B}{\Delta t} = \frac{-1000 \cdot (-10^{-4}\ \text{Wb})}{0{,}02\ \text{s}} = \frac{0{,}1}{0{,}02} = \boxed{5\ \text{V}} \tag{1.125}$$

b) Autoinducción de la bobina:

$$L = \frac{N \cdot \Phi_B}{I} = \frac{1000 \cdot 10^{-4}\ \text{Wb}}{5\ \text{A}} = \boxed{0{,}02\ \text{H} = 20\ \text{mH}} \tag{1.126}$$

Comprobación: Usando directamente $|\mathcal{E}| = L\frac{|\Delta I|}{\Delta t} = 0{,}02\ \text{H} \cdot \frac{5\ \text{A}}{0{,}02\ \text{s}} = 5\ \text{V}$, obtenemos exactamente el mismo resultado.

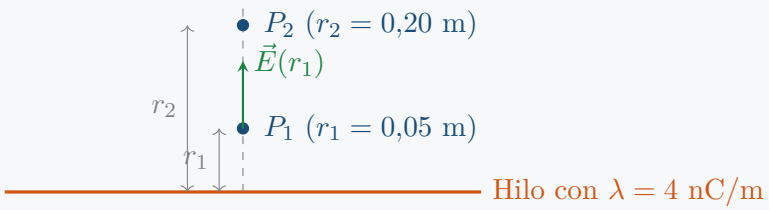
1.3 Problemas Adicionales de Exámenes Oficiales de la UGR

Ejercicio Resuelto: Cálculo de Campo y Potencial de Hilo Infinito — Examen Convocatoria Oficial

Se tiene un hilo rectilíneo de longitud infinita cargado uniformemente con densidad lineal constante $\lambda = 4 \times 10^{-9}$ C/m.

a) Calcular el campo eléctrico a una distancia $r_1 = 0{,}05$ m del hilo.

b) Calcular la diferencia de potencial entre los puntos $r_1 = 0{,}05$ m y $r_2 = 0{,}20$ m.



Solución Paso a Paso:

a) Por simetría cilíndrica, aplicando la Ley de Gauss a un cilindro coaxial de radio r y longitud L:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E(r) \cdot (2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_0} \implies E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{2K_0\lambda}{r} \tag{1.127}$$

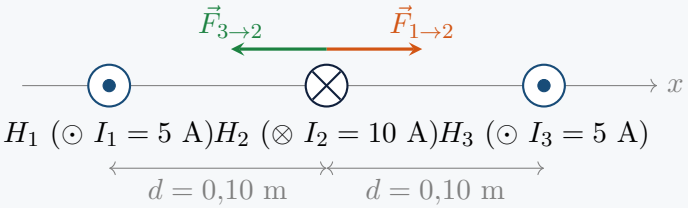
$$E(0{,}05) = \frac{2 \times (9 \times 10^9) \times (4 \times 10^{-9})}{0{,}05} = \frac{72}{0{,}05} = 1440\ \text{V/m} \implies \vec{E}(r_1) = 1440\,\hat{u}_r\ \text{V/m} \tag{1.128}$$

b) Diferencia de potencial integrando el campo entre r_1 y r_2:

$$V(r_1) - V(r_2) = \int_{r_1}^{r_2} E(r)\,dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = 72 \cdot \ln\left(\frac{0{,}20}{0{,}05}\right) = 72 \cdot \ln(4) \approx 99{,}81\ \text{V} \tag{1.129}$$

Ejercicio Resuelto: Fuerza Magnética entre Tres Hilos Paralelos — Examen Enero 2021

Tres hilos conductores rectilíneos, paralelos y muy largos están dispuestos perpendicularmente al plano XY pasando por las coordenadas $x_1 = -d$, $x_2 = 0$ y $x_3 = +d$ con $d = 0{,}10$ m. Por los hilos 1 y 3 circulan corrientes $I_1 = 5$ A e $I_3 = 5$ A saliendo del papel $(+\hat{k})$. Por el hilo central 2 circula $I_2 = 10$ A entrando al papel $(-\hat{k})$. Determinar la fuerza magnética por unidad de longitud sobre el hilo 2 y sobre el hilo 3.



Solución Paso a Paso:

1) Fuerza neta por unidad de longitud sobre el hilo central 2 (en $x = 0$):

- El hilo 1 $(+\hat{k})$ y el hilo 2 $(-\hat{k})$ tienen corrientes de sentidos opuestos $\implies$ se repelen. La fuerza que 1 ejerce sobre 2 apunta hacia la derecha $(+\hat{\imath})$:

$$\frac{\vec{F}_{1\to2}}{\ell} = +\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\hat{\imath} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \times 5 \times 10}{2\pi \times 0{,}10}\hat{\imath} = +1 \times 10^{-4}\ \text{N/m}\ \hat{\imath} \tag{1.130}$$

- El hilo 3 $(+\hat{k})$ y el hilo 2 $(-\hat{k})$ también tienen sentidos opuestos $\implies$ se repelen. La fuerza que 3 ejerce sobre 2 apunta hacia la izquierda $(-\hat{\imath})$:

$$\frac{\vec{F}_{3\to2}}{\ell} = -\frac{\mu_0 I_3 I_2}{2\pi d}\hat{\imath} = -1 \times 10^{-4}\ \text{N/m}\ \hat{\imath} \tag{1.131}$$

Sumando ambas contribuciones, por simetría la fuerza neta sobre el hilo central 2 es nula:

$$\frac{\vec{F}_2^{neta}}{\ell} = \frac{\vec{F}_{1\to2}}{\ell} + \frac{\vec{F}_{3\to2}}{\ell} = \vec{0} \tag{1.132}$$

2) Fuerza neta por unidad de longitud sobre el hilo 3 (en $x = +d$):

- El hilo 2 (sentido contrario a distancia $d = 0{,}10$ m) repele al hilo 3 hacia la derecha $(+\hat{\imath})$:

$$\frac{\vec{F}_{2\to3}}{\ell} = +\frac{\mu_0 I_2 I_3}{2\pi d}\hat{\imath} = +1 \times 10^{-4}\ \text{N/m}\ \hat{\imath} \tag{1.133}$$

- El hilo 1 (mismo sentido a distancia $2d = 0{,}20$ m) atrae al hilo 3 hacia la izquierda $(-\hat{i})$:

$$\frac{\vec{F}_{1\to 3}}{\ell} = -\frac{\mu_0 I_1 I_3}{2\pi(2d)}\hat{i} = -\frac{(4\pi\times 10^{-7})\times 5\times 5}{2\pi\times 0{,}20}\hat{i} = -0{,}25\times 10^{-4}\ \text{N/m}\ \hat{i} \tag{1.134}$$

Por tanto, la fuerza magnética total por unidad de longitud sobre el hilo 3 es:

$$\boxed{\frac{\vec{F}_3^{neta}}{\ell} = (1{,}00 - 0{,}25)\times 10^{-4}\ \hat{i} = +0{,}75\times 10^{-4}\ \text{N/m}\ \hat{i}} \tag{1.135}$$

Tema 2

Fundamentos de Teoría de Circuitos: Corriente Continua (DC)

2.1 Elementos Lineales de Dos Terminales: Activos y Pasivos

Un circuito eléctrico es una interconexión cerrada de elementos de dos o más terminales a través de los cuales puede fluir carga eléctrica. Se denominan **elementos lineales de dos terminales** aquellos en los que la relación matemática entre la caída de tensión $v(t)$ entre sus extremos y la intensidad de corriente $i(t)$ que los atraviesa es directamente proporcional, diferencial, integral o una combinación lineal de ellas.

Atendiendo a su comportamiento energético global dentro del circuito, los elementos se clasifican en dos grandes familias:

- **Elementos activos**: Son capaces de inyectar o suministrar energía eléctrica neta al sistema a lo largo del tiempo (generadores o fuentes independientes y dependientes de tensión y de corriente).

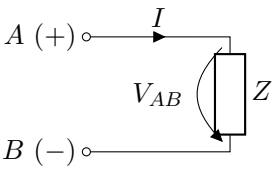
- **Elementos pasivos**: No pueden generar energía por sí mismos; únicamente la disipan en forma de calor irreversible (resistencias) o la almacenan temporalmente en forma de campo eléctrico (condensadores) o campo magnético (bobinas o inductores) para devolverla posteriormente al circuito.

2.1.1 Potencia Eléctrica y Convenio de Signos (Pasivo vs. Activo)

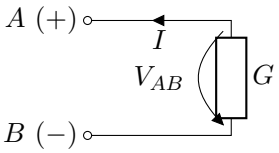
La **potencia eléctrica instantánea** $p(t)$ representa la velocidad con la que se transfiere, consume o suministra energía eléctrica por unidad de tiempo. Aplicando la regla de la cadena a partir de las definiciones de potencial ($v = dW/dq$) e intensidad ($i = dq/dt$):

$$p(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \cdot \frac{dq}{dt} = v(t) \cdot i(t) \qquad \text{[SI: Vatio, W} = \text{J/s} = \text{V} \cdot \text{A]} \tag{2.1}$$

Para determinar sin ambigüedad si un dipolo entre los terminales A y B (con tensión $V_{AB} = V_A - V_B$) está **absorbiendo** (consumiendo) o **cediendo** (generando) potencia, se emplea el criterio de signos:



Convenio Pasivo (Receptor)
I entra por el terminal + (A)



Convenio Activo (Generador)
I sale por el terminal + (A)

Figura 2.1: Referencia de signos pasiva (izquierda) y activa (derecha) en un elemento de dos terminales.

Ley / Teorema: Balance de Potencias y Teorema de Tellegen

- **En una resistencia**: Siempre absorbe (disipa) potencia activa independientemente del sentido de la corriente:

$$P_R = V_R \cdot I_R = I_R^2 \cdot R = \frac{V_R^2}{R} \geq 0 \tag{2.2}$$

- **En una fuente (criterio de signos de clase)**: Si la corriente I circula a través de la fuente desde el terminal negativo (B) hacia el positivo (A, es decir, *subiendo en potencial*), la potencia suministrada por la fuente al circuito es:

$$P_{\text{fuente}} = (V_A - V_B) \cdot I_{\text{subiendo}} \tag{2.3}$$

  Si al resolver el circuito este producto resulta **positivo** ($P_f > 0$), la fuente suministra efectivamente potencia al sistema. Si resulta **negativo** ($P_f < 0$), significa que la corriente real entra por el terminal positivo y la fuente está **absorbiendo** potencia (actuando como carga o batería en carga).

- **Conservación de la potencia**: En todo circuito eléctrico cerrado se cumple en todo instante que la potencia total suministrada por las fuentes es exactamente igual a la potencia total disipada en las resistencias:

$$\sum P_{\text{fuentes}} = \sum P_{\text{resistencias}} \tag{2.4}$$

2.1.2 Elementos Activos: Fuentes Independientes y Dependientes

Las fuentes de tensión y de intensidad son elementos activos capaces de suministrar energía al sistema y se dividen en **independientes** y **dependientes** (o controladas).

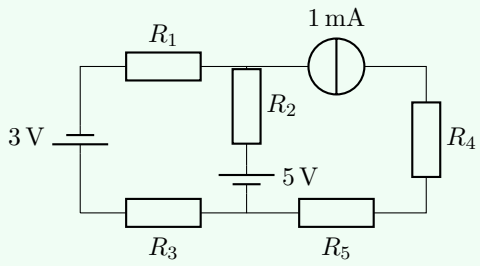
1. Fuentes Independientes

- **Fuente independiente de tensión**: Proporciona una diferencia de potencial fija V entre sus extremos, con independencia de la corriente I que circule por ella.
- **Fuente independiente de intensidad**: Fija el valor de la intensidad de corriente I en toda la rama serie en la que se encuentra conectada, independientemente de la tensión que caiga entre sus bornes.

Ejemplo Explicado: Efecto de una fuente de corriente en una rama serie

En el siguiente circuito, la fuente de intensidad de 1 mA está conectada en la rama derecha en serie con las resistencias R_4 y R_5. Por tanto, **por R_4 y R_5 pasa**

obligatoriamente una corriente de 1 mA, sin importar los valores de las demás ramas:



2. Fuentes Dependientes o Controladas

Representadas mediante un símbolo romboidal, su tensión o intensidad depende proporcionalmente de la caída de potencial o de la corriente en otra parte del circuito. Existen 4 tipos fundamentales (donde A_v, A_R, A_G, A_i son los factores o constantes de proporcionalidad):

1. **Fuente de tensión dependiente de tensión (VCVS)**: El valor de la tensión de la fuente es proporcional a la caída de potencial v en otra parte del circuito: $V_{\text{dep}} = A_v \cdot v$ (A_v adimensional).

2. **Fuente de tensión dependiente de intensidad (CCVS)**: El valor de la tensión de la fuente es proporcional a la intensidad i que pasa por otra rama del circuito: $V_{\text{dep}} = A_R \cdot i$ (A_R en Ω).

3. **Fuente de intensidad dependiente de tensión (VCCS)**: La intensidad de la fuente es proporcional a la caída de tensión v de otra parte del circuito: $I_{\text{dep}} = A_G \cdot v$ (A_G en $\text{S} = \Omega^{-1}$).

4. **Fuente de intensidad dependiente de intensidad (CCCS)**: La intensidad de la fuente es proporcional a la intensidad i en otra parte del circuito: $I_{\text{dep}} = A_i \cdot i$ (A_i adimensional).

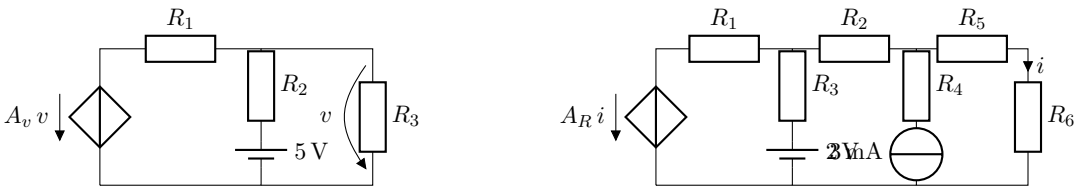


Figura 2.2: Ejemplos de circuitos con fuentes controladas de tensión (VCVS y CCVS) de los apuntes de clase.

2.1.3 Elementos Pasivos: Resistencia, Condensador y Bobina

1. Resistencia (R) y Deducción Microscópica de la Ley de Ohm

Un resistor es un elemento tal que, al aplicar una diferencia de potencial $V_A - V_B$ entre sus terminales, deja pasar una corriente de intensidad I directamente proporcional a la diferencia de potencial aplicada.

Consideremos un hilo conductor cilíndrico de longitud L y área transversal S, sometido a los potenciales $V_1 > V_2$, lo cual crea en su interior un campo eléctrico uniforme $\vec{E}$ dirigido hacia la derecha:

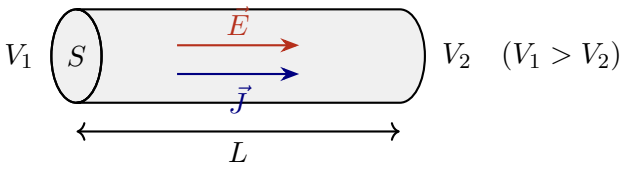


Figura 2.3: Conductor cilíndrico de longitud L, sección S y conductividad σ bajo una diferencia de potencial $V_1 - V_2$.

1. La relación microscópica entre la densidad de corriente $\vec{J}$ y el campo eléctrico $\vec{E}$ es la Ley de Ohm local: $J = \sigma \cdot E$, donde σ es la conductividad del material.

2. De la relación entre campo eléctrico y potencial ($E = -dV/dl$), dado que $\Delta V = V_2 - V_1$, el módulo del campo es:

$$E = -\frac{V_2 - V_1}{L} = \frac{V_1 - V_2}{L} \implies J = \sigma \frac{V_1 - V_2}{L} \tag{2.5}$$

3. Integrando la densidad de corriente sobre la sección transversal S del conductor:

$$I = \int_S J \, dS = \sigma \frac{V_1 - V_2}{L} S = J \cdot S \implies J = \frac{I}{S} \tag{2.6}$$

4. Despejando la caída de potencial $(V_1 - V_2)$ e introduciendo la **resistividad** $\rho = \frac{1}{\sigma}$ $(\Omega \cdot \mathrm{m})$:

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{\sigma}\frac{L}{S} I = \rho \frac{L}{S} I \implies \boxed{V_1 - V_2 = R \cdot I} \quad \text{con} \quad \boxed{R = \rho \frac{L}{S}} \tag{2.7}$$

Importante / Ojo Examen: Unidades prácticas en electrónica

En los problemas de circuitos es muy frecuente trabajar con tensiones en voltios (V), resistencias en kilohmios ($\mathrm{k\Omega} = 10^3\,\Omega$) e intensidades en miliamperios ($\mathrm{mA} = 10^{-3}\,\mathrm{A}$), ya que son unidades mutuamente coherentes:

$$1\,\mathrm{V} = 1\,\mathrm{k\Omega} \times 1\,\mathrm{mA} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathrm{mA} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{k\Omega}} \tag{2.8}$$

2. Condensador (C)

Un condensador ideal consiste en dos armaduras conductoras próximas separadas por un aislante (dieléctrico) perfecto. La carga Q almacenada en cualquiera de sus armaduras es proporcional a la diferencia de potencial entre ellas:

$$Q = C\,(V_A - V_B) \qquad [\text{Capacidad } C \text{ en Faradios: } 1\,\mathrm{F} = 1\,\mathrm{C/V}] \tag{2.9}$$

Aunque las cargas no pueden atravesar el aislante, un incremento de tensión Δv produce un incremento de carga almacenada $\Delta Q = C\,\Delta v$. En el límite diferencial, esta variación temporal de carga se traduce en una corriente eléctrica:

$$i_C(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = C \frac{dv_C(t)}{dt} \tag{2.10}$$

Propiedad fundamental: La tensión entre las armaduras de un condensador **no puede variar de forma discontinua** (salto brusco), sino que debe ser continua en todo instante: $v_C(0^-) = v_C(0^+)$.

3. Inductor o Bobina (L)

Una bobina de N espiras atravesada por una corriente I genera un flujo magnético Φ_B proporcional a dicha corriente. Se define la **inductancia** o coeficiente de autoinducción L (medida en Henrios, $1\,\mathrm{H} = 1\,\Omega \cdot \mathrm{s} = 1\,\mathrm{Wb/A}$) como:

$$L = \frac{N\,\Phi_B}{I} \tag{2.11}$$

Por la Ley de Faraday-Lenz, una variación de corriente ΔI produce una variación de flujo $\Delta\Phi_B$ y, por tanto, una caída de tensión autoinducida entre sus extremos:

$$v_L(t) = V_A - V_B = L\,\frac{di_L(t)}{dt} \tag{2.12}$$

Propiedad fundamental: La intensidad de corriente que atraviesa una bobina **no puede cambiar instantáneamente**: $i_L(0^-) = i_L(0^+)$.

2.1.4 Asociación de Elementos y Teorema de Kennelly ($\Delta \leftrightarrow$ Y)

1. Asociación de Resistencias y Condensadores

Elemento	Asociación en Serie	Asociación en Paralelo
Resistencias	$R_{\text{total}} = R_1 + R_2 + \cdots + R_N$	$\dfrac{1}{R_{\text{total}}} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \cdots + \dfrac{1}{R_N}$ $\left(R_1 \parallel R_2 = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\right)$
Condensadores	$\dfrac{1}{C_{\text{total}}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2} + \cdots + \dfrac{1}{C_N}$	$C_{\text{total}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N$
Fuentes	Solo de tensión: $V_{\text{total}} = \sum V_k$	Solo de intensidad: $I_{\text{total}} = \sum I_k$

Tabla 2.1: Reglas de asociación equivalente de resistencias, condensadores y fuentes ideales.

2. Teorema de Kennelly: Transformación Triángulo (Δ) $\leftrightarrow$ Estrella (Y)

Cuando en una red resistiva (como un puente de Wheatstone no equilibrado) las resistencias no están ni en serie ni en paralelo, el **Teorema de Kennelly** permite transformar una configuración en **Triángulo o Delta (Δ)** entre tres nudos (a, b, c) en una configuración equivalente en **Estrella (Y o T)** y viceversa:

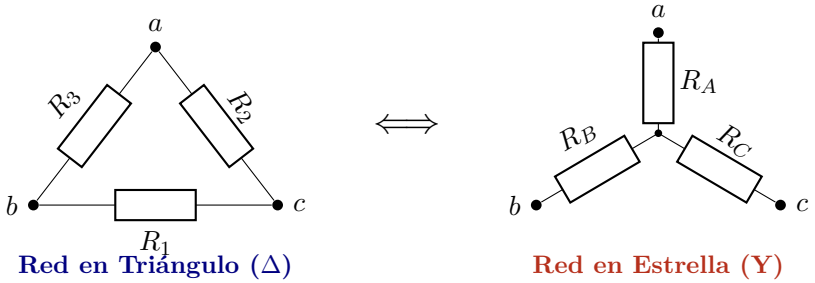


Figura 2.4: Equivalencia entre una red en Triángulo (Δ: R_1, R_2, R_3) y una red en Estrella (Y: R_A, R_B, R_C).

Ley / Teorema: Fórmulas de Transformación de Kennelly

- **Paso de Triángulo (Δ) a Estrella (Y)**: Cada resistencia de la estrella es el producto de las dos resistencias adyacentes del triángulo dividido entre la suma de las tres resistencias del triángulo:

$$R_A = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \qquad R_B = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}, \qquad R_C = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2 + R_3} \tag{2.13}$$

- **Paso de Estrella (Y) a Triángulo (Δ)**: Cada resistencia del triángulo es la suma de los productos cruzados dos a dos de la estrella dividida entre la resistencia de la estrella opuesta:

$$R_1 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_A}, \; R_2 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_B}, \; R_3 = \frac{R_A R_B + R_A R_C + R_B R_C}{R_C} \tag{2.14}$$

2.1.5 Elementos Reales y Comportamiento en Señal Continua (DC)

1. Efecto de la Temperatura en Resistencias Reales

En la realidad, las resistencias, condensadores y bobinas presentan efectos parásitos y dependen de la temperatura. El valor de una resistencia R_H a una temperatura alta T_H en función de su valor R_L a una temperatura de referencia T_L viene dado por:

$$R_H = R_L \left[1 + \alpha \left(T_H - T_L\right)\right] \tag{2.15}$$

donde α (K^{-1} o $^\circ\mathrm{C}^{-1}$) es el coeficiente de temperatura del material.

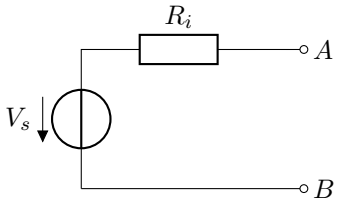
2. Fuentes Reales de Tensión y de Intensidad y Transformación de Fuentes

- **Fuente de tensión real**: Se modela mediante una fuente ideal V_s en **serie** con una resistencia interna R_i. Al conectar una carga entre A y B, la tensión en bornes cae ($V_{AB} = V_s - IR_i$). Para que la fuente sea buena y la tensión varíe lo mínimo posible, R_i **debe ser lo más pequeña posible** (idealmente $R_i = 0$).

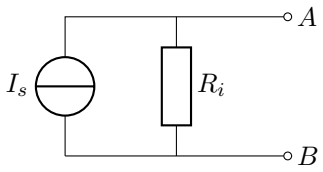
- **Fuente de intensidad real**: Se modela mediante una fuente ideal I_s en **paralelo** con una resistencia interna R_i. Para que casi toda la corriente salga hacia la carga, R_i **debe ser lo más grande posible** (idealmente $R_i \to \infty$).

- **Transformación de fuentes**: Una fuente de tensión real (V_s, R_i serie) es exactamente equivalente entre sus terminales A y B a una fuente de corriente real (I_s, R_i paralelo) siempre que se cumpla:

$$V_s = I_s \cdot R_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_s = \frac{V_s}{R_i} \tag{2.16}$$



Fuente de tensión real (R_i pequeña)



Fuente de corriente real (R_i grande)

Figura 2.5: Modelos circuitales de fuentes reales y su equivalencia ($V_s = I_s R_i$).

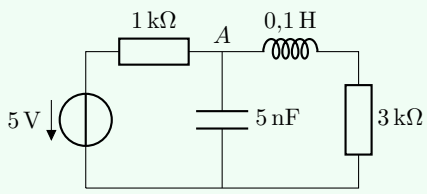
3. Elementos en Régimen Permanente de Corriente Continua (DC)

Cuando un circuito alimentado por fuentes continuas lleva mucho tiempo funcionando, todas las magnitudes se estabilizan ($V = \text{cte}, I = \text{cte}$):

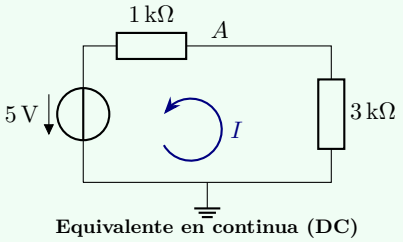
- **Resistencia**: Se comporta igual ($V = IR$).
- **Condensador**: Se carga hasta una tensión constante ($dV/dt = 0 \implies I = C\frac{dV}{dt} = 0$). Por tanto, en continua estacionaria **un condensador equivale a un interruptor abierto (circuito abierto)**.
- **Bobina**: La intensidad que pasa por ella es fija ($dI/dt = 0 \implies V = L\frac{dI}{dt} = 0$). Por tanto, en continua estacionaria **una bobina equivale a un hilo conductor ideal (cortocircuito)**.

Ejemplo Explicado: Análisis en régimen continuo estacionario con bobina y condensador

Calcula la tensión en el nudo A y la carga acumulada en el condensador de 5 nF del siguiente circuito cuando trabaja en corriente continua estacionaria:



Circuito original



Equivalente en continua (DC)

Resolución paso a paso:

1. En continua, sustituimos el condensador de 5 nF por un circuito abierto y la bobina de 0,1 H por un hilo conductor.
2. Referenciamos el conductor inferior a tierra (0 V). Queda una única malla con las resistencias de 1 kΩ y 3 kΩ en serie:
$$I = \frac{5\,\text{V}}{1\,\text{k}\Omega + 3\,\text{k}\Omega} = \frac{5}{4}\,\text{mA} = 1{,}25\,\text{mA}$$
3. La tensión en el nudo A (que coincide con la tensión en bornes del condensador y de la resistencia de 3 kΩ) es:
$$V_A = I \cdot 3\,\text{k}\Omega = \frac{3}{4} \cdot 5\,\text{V} = \frac{15}{4}\,\text{V} = 3{,}75\,\text{V}$$
4. La carga acumulada en el condensador es:
$$Q = C \cdot V_A = 5\,\text{nF} \cdot \frac{15}{4}\,\text{V} = 18{,}75\,\text{nC} = 1{,}875 \times 10^{-8}\,\text{C}$$

2.2 Leyes de Kirchhoff y Métodos Sistemáticos de Análisis

2.2.1 Topología de Redes y Leyes de Kirchhoff

- **Nudo (o nodo)**: Punto de unión donde concurren dos o más elementos. Se llama *nudo principal* a aquel que conecta tres o más ramas.
- **Rama**: Conjunto de elementos conectados en serie entre dos nudos principales consecutivos (por todos ellos circula exactamente la misma corriente).
- **Lazo**: Cualquier camino cerrado dentro del circuito.
- **Malla**: Lazo cerrado que no contiene ningún otro lazo en su interior.

Ley / Teorema: Leyes de Kirchhoff

1. **Primera Ley de Kirchhoff (Ley de Corrientes o de Nudos, LCK)**: Basada en la conservación de la carga eléctrica, establece que en cualquier nudo del circuito la suma algebraica de las corrientes que entran es igual a la suma de las corrientes que salen:

$$\sum_{\text{entran}} I_k = \sum_{\text{salen}} I_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_{k=1}^{N} I_k = 0 \tag{2.17}$$

2. **Segunda Ley de Kirchhoff (Ley de Tensiones o de Mallas, LTK)**: Basada en el carácter conservativo del campo electrostático, establece que la suma algebraica de las diferencias de potencial a lo largo de cualquier trayectoria cerrada (lazo o malla) es nula:

$$\sum_{\text{malla}} V_k = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum V_{\text{fuentes}} = \sum I_k R_k \tag{2.18}$$

2.2.2 Divisor de Tensión y Divisor de Corriente



Figura 2.6: Circuitos fundamentales de divisor de tensión resistivo (izquierda) y divisor de corriente (derecha).

- **Divisor de tensión**: En dos resistencias en serie alimentadas por una tensión total V, la corriente común es $I = \frac{V}{R_1+R_2}$, por lo que la caída de tensión en cada resistencia es proporcional a su propio valor:

$$V_{R1} = I \cdot R_1 = \frac{R_1}{R_1+R_2}\,V, \qquad V_{R2} = V_A = I \cdot R_2 = \frac{R_2}{R_1+R_2}\,V \tag{2.19}$$

- **Divisor de corriente**: En dos resistencias en paralelo alimentadas por una corriente total I_T, la tensión común es $V = I_T(R_1 \parallel R_2) = I_T \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$, repartiéndose la corriente de forma inversamente proporcional a cada resistencia:

$$I_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I_T, \qquad I_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I_T \tag{2.20}$$

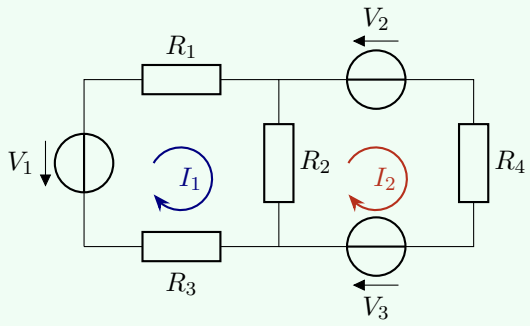
2.2.3 Método de las Corrientes de Malla

Método Sistemático: Procedimiento General del Método de Mallas

1. Asignar una corriente ficticia de malla $(I_1, I_2, \ldots, I_M)$ a cada malla independiente del circuito (habitualmente todas en sentido horario).
2. Escribir la ecuación de la 2ª Ley de Kirchhoff para cada malla:
   - En el miembro izquierdo se colocan las fuentes de tensión de la malla: con signo **positivo (+)** si la corriente de malla pasa de − a + por la fuente (a favor), y **negativo (−)** si pasa de + a − (en contra).
   - En el miembro derecho se suman las caídas de tensión en las resistencias: la corriente de la propia malla multiplica a la suma de todas las resistencias de esa malla, y se restan las corrientes de las mallas vecinas multiplicadas por la resistencia compartida.
3. Agrupar las incógnitas en forma matricial $[V] = [R][I]$ y resolver mediante la regla de Cramer o sustitución. Si alguna intensidad sale negativa, significa que su sentido físico real es el opuesto al supuesto inicialmente.

Ejemplo Explicado: Resolución paso a paso por el método de mallas

Determina las corrientes de malla I_1, I_2 y la corriente que atraviesa la resistencia central R_2 en el siguiente circuito con $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 2\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 3\,\text{k}\Omega$, $R_4 = 4\,\text{k}\Omega$, $V_1 = 1\,\text{V}$, $V_2 = 2\,\text{V}$ y $V_3 = 3\,\text{V}$:



Resolución paso a paso:

1. **Planteamiento de las ecuaciones de cada malla** (tomando I_1 e I_2 en sentido horario):

$$\text{Malla 1:} \quad V_1 = I_1 R_1 + (I_1 - I_2) R_2 + I_1 R_3$$
$$\text{Malla 2:} \quad V_2 - V_3 = I_2 R_4 + (I_2 - I_1) R_2$$

2. **Agrupación de incógnitas y sustitución de valores** (en kΩ, V y mA):

$$V_1 = (R_1 + R_2 + R_3) I_1 - R_2 I_2 \implies 1 = 6 I_1 - 2 I_2$$
$$V_2 - V_3 = -R_2 I_1 + (R_2 + R_4) I_2 \implies 2 - 3 = -1 = -2 I_1 + 6 I_2$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

3. **Resolución por la regla de Cramer**:

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{6-2}{36-4} = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}\,\text{mA} = 0{,}125\,\text{mA}$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}} = \frac{-6+2}{36-4} = \frac{-4}{32} = -\frac{1}{8}\,\text{mA} = -0{,}125\,\text{mA}$$

Como I_2 sale negativa, su sentido físico real es antihorario. La corriente total que baja por R_2 es:

$$I_{R2} = I_1 - I_2 = \frac{1}{8} - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{4}\,\text{mA} = 0{,}25\,\text{mA}$$

2.2.4 Método de las Tensiones de Nudos

Método Sistemático: Procedimiento General del Método de Nudos

1. Identificar todos los nudos principales del circuito y elegir uno de ellos (habitualmente el que conecta más ramas o fuentes de tensión) como **nudo de referencia o tierra** (0 V).
2. Asignar una tensión incógnita ($V_a, V_b, V_c, \dots$) a cada uno de los demás nudos principales respecto a tierra.
3. Aplicar la 1ª Ley de Kirchhoff (LCK) en cada nudo principal expresando las corrientes de rama en función de las tensiones de nudo mediante la Ley de Ohm ($I_{ij} = \frac{V_i - V_j}{R_{ij}}$).

Por ejemplo, en una red en puente con nudos principales a, b, c y tierra d ($V_d = 0\,\text{V}$):

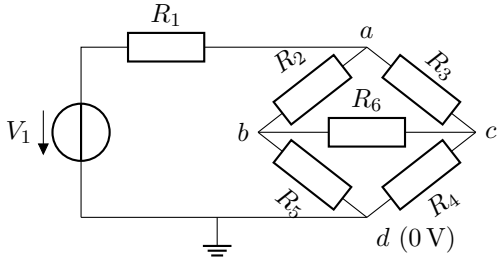


Figura 2.7: Red en puente para plantear las ecuaciones de nudos en a, b y c.

Las ecuaciones de nudo (asumiendo todas las corrientes entrando al nudo o saliendo de él)

son:

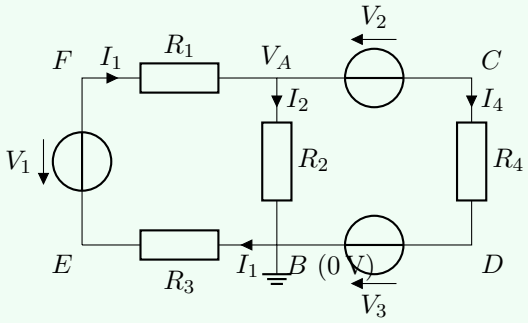
$$\text{Nudo } a: \quad \frac{V_1 - V_a}{R_1} + \frac{V_b - V_a}{R_2} + \frac{V_c - V_a}{R_3} = 0 \tag{2.21}$$

$$\text{Nudo } b: \quad \frac{V_a - V_b}{R_2} + \frac{V_c - V_b}{R_6} + \frac{0 - V_b}{R_5} = 0 \tag{2.22}$$

$$\text{Nudo } c: \quad \frac{V_a - V_c}{R_3} + \frac{V_b - V_c}{R_6} + \frac{0 - V_c}{R_4} = 0 \tag{2.23}$$

Ejemplo Explicado: Otro ejemplo resuelto por nudos con fuentes flotantes en las ramas

Resuelve por el método de nudos el circuito de la figura (con los mismos valores del ejemplo anterior: $V_1 = 1\,\text{V}, V_2 = 2\,\text{V}, V_3 = 3\,\text{V}, R_1 = 1\,\text{k}\Omega, R_2 = 2\,\text{k}\Omega, R_3 = 3\,\text{k}\Omega, R_4 = 4\,\text{k}\Omega$):



Resolución paso a paso:

1. **Referenciamos a tierra el nudo principal inferior**: $V_B = 0\,\text{V}$.
2. **Aplicamos LCK en el nudo principal superior V_A**:

$$I_1 = I_2 + I_4$$

3. **Expresamos cada intensidad en función de V_A**:
   - En la rama central: $I_2 = \dfrac{V_A - 0}{R_2} = \dfrac{V_A}{2\,\text{k}\Omega}$.
   - En la rama izquierda: por toda la rama serie (R_3, V_1, R_1) circula la misma corriente I_1. Como $0 - V_E = I_1 R_3 \implies V_E = -I_1 R_3$, y $V_F = V_E + V_1 = V_1 - I_1 R_3$, entonces:

$$I_1 = \frac{V_F - V_A}{R_1} = \frac{V_1 - I_1 R_3 - V_A}{R_1} \implies I_1(R_1 + R_3) = V_1 - V_A \implies I_1 = \frac{V_1 - V_A}{R_1 + R_3} = \frac{1 - V_A}{4\,\text{k}\Omega}$$

   - En la rama derecha: $V_C = V_A + V_2$ y $V_D = 0 + V_3$, por lo que:

$$I_4 = \frac{V_C - V_D}{R_4} = \frac{V_A + V_2 - V_3}{R_4} = \frac{V_A + 2 - 3}{4\,\text{k}\Omega} = \frac{V_A - 1}{4\,\text{k}\Omega}$$

4. **Sustituimos en $I_1 = I_2 + I_4$ y despejamos V_A**:

$$\frac{1 - V_A}{4} = \frac{V_A}{2} + \frac{V_A - 1}{4} \implies \frac{1 - V_A}{4} + \frac{1 - V_A}{4} = \frac{V_A}{2} \implies \frac{1 - V_A}{2} = \frac{V_A}{2} \implies \boxed{V_A = \frac{1}{2}\,\text{V} = 0{,}5\,\text{V}}$$

5. **Conocido V_A, obtenemos inmediatamente las tres corrientes**:

$$I_2 = \frac{1/2\,\text{V}}{2\,\text{k}\Omega} = \frac{1}{4}\,\text{mA}, \qquad I_1 = \frac{1 - 1/2}{4\,\text{k}\Omega} = \frac{1}{8}\,\text{mA}, \qquad I_4 = \frac{1/2 - 1}{4\,\text{k}\Omega} = -\frac{1}{8}\,\text{mA}$$

2.2.5 Teorema de Thévenin y Teorema de Norton

Ley / Teorema: Teoremas de Thévenin y de Norton

- **Teorema de Thévenin**: Cualquier circuito lineal complejo visto desde dos terminales A y B puede sustituirse por una única **fuente independiente de tensión** V_{th} conectada en **serie** con una **resistencia equivalente** R_{th}, donde:
  1. $V_{th} = V_A - V_B$ es la tensión en circuito abierto entre los terminales A y B (desconectando la carga).
  2. R_{th} es la resistencia equivalente vista entre A y B al **anular todas las fuentes independientes** del circuito:
     - Las **fuentes de tensión** se anulan sustituyéndolas por un **cortocircuito** (hilo conductor, $V = 0$).
     - Las **fuentes de intensidad** se anulan sustituyéndolas por un **circuito abierto** (interruptor abierto, $I = 0$).
- **Teorema de Norton**: El mismo circuito lineal entre A y B puede reducirse a una única **fuente de intensidad** I_N en **paralelo** con una **resistencia** R_N, donde $R_N = R_{th}$ e $I_N = I_{cc}$ es la corriente de cortocircuito que circula de A a B al unir ambos terminales con un cable ideal.
- **Relación entre Thévenin y Norton**: Se puede pasar siempre de uno a otro mediante:

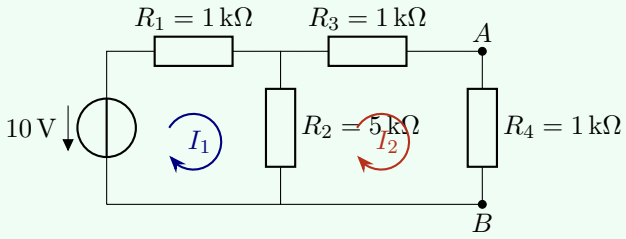
$$R_{th} = R_N, \qquad V_{th} = I_N \cdot R_N \qquad \Longleftrightarrow \qquad I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} \tag{2.24}$$



Figura 2.8: Circuitos equivalentes de Thévenin (izquierda) y de Norton (derecha) entre los terminales A y B.

Ejemplo Explicado: Cálculo comparativo por Mallas, Thévenin y Norton

Sea el siguiente circuito con $V = 10\,\text{V}$, $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 5\,\text{k}\Omega$, $R_3 = 1\,\text{k}\Omega$ y resistencia de carga $R_4 = 1\,\text{k}\Omega$ conectada entre A y B. Calcula la tensión V_{AB} de tres formas distintas: (1) resolviendo el circuito completo por mallas, (2) mediante el equivalente de Thévenin y (3) mediante el equivalente de Norton.



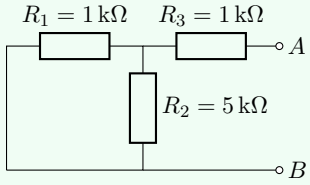
Método 1: Resolución directa por mallas:

$$10 = I_1(R_1 + R_2) - I_2 R_2 = 6I_1 - 5I_2$$
$$0 = -I_1 R_2 + I_2(R_2 + R_3 + R_4) = -5I_1 + 7I_2$$

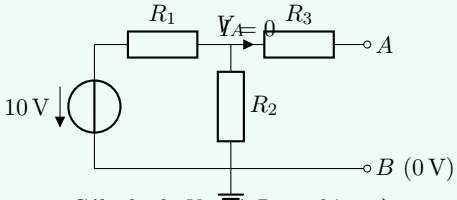
Por Cramer ($\Delta = 42 - 25 = 17$):

$$I_1 = \frac{70}{17}\,\text{mA}, \qquad I_2 = I_{R4} = \frac{50}{17}\,\text{mA} \implies \boxed{V_{AB} = I_{R4} \cdot R_4 = \frac{50}{17}\,\text{V} \approx 2{,}94\,\text{V}}$$

Método 2: Mediante el Equivalente de Thévenin (quitando R_4):



Cálculo de R_{th} (fuente anulada)



Cálculo de V_{th} (A-B en abierto)

- **Resistencia de Thévenin**: Anulando la fuente de 10 V (cortocircuito), R_1 y R_2 quedan en paralelo y en serie con R_3:

$$R_{th} = R_3 + (R_1 \parallel R_2) = 1 + \frac{1 \cdot 5}{1+5} = 1 + \frac{5}{6} = \frac{11}{6}\,\text{k}\Omega$$

- **Tensión de Thévenin**: Con A y B en abierto no circula corriente por R_3 ($I_{R3} = 0$), luego por divisor de tensión:

$$V_{th} = V_A - V_B = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \cdot 10\,\text{V} = \frac{5}{6} \cdot 10 = \frac{50}{6}\,\text{V}$$

- **Conectando $R_4 = 1\,\text{k}\Omega$ al equivalente de Thévenin**:

$$I = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_4} = \frac{50/6}{11/6 + 1} = \frac{50}{17}\,\text{mA} \implies \boxed{V_{AB} = I \cdot R_4 = \frac{50}{17}\,\text{V}} \quad \text{(OK)}$$

Método 3: Mediante el Equivalente de Norton:

- Cortocircuitando A y B, las resistencias R_2 y R_3 quedan en paralelo ($R_2 \parallel R_3 = \frac{5 \cdot 1}{5+1} = \frac{5}{6}\,\text{k}\Omega$). La tensión en el nudo intermedio C por divisor de tensión es:

$$V_C = \frac{R_2 \parallel R_3}{R_1 + (R_2 \parallel R_3)} \cdot 10\,\text{V} = \frac{5/6}{1 + 5/6} \cdot 10 = \frac{50}{11}\,\text{V} \implies I_N = I_{AB} = \frac{V_C}{R_3} = \frac{50}{11}\,\text{mA}$$

- Al conectar $R_4 = 1\,\text{k}\Omega$ en paralelo con $R_N = \frac{11}{6}\,\text{k}\Omega$, la resistencia total es $R_p = R_N \parallel R_4 = \frac{11/6 \cdot 1}{11/6+1} = \frac{11}{17}\,\text{k}\Omega$, de modo que:

$$\boxed{V_{AB} = I_N \cdot R_p = \frac{50}{11}\,\text{mA} \cdot \frac{11}{17}\,\text{k}\Omega = \frac{50}{17}\,\text{V}} \quad \text{(OK)}$$

2.2.6 Teorema de Máxima Transferencia de Potencia

Si se conecta una resistencia de carga variable R_L a un circuito cuyo equivalente de Thévenin es (V_{th}, R_{th}), la potencia disipada en la carga es $P_L = I^2 R_L = \left(\frac{V_{th}}{R_{th}+R_L}\right)^2 R_L$. Derivando respecto a R_L e igualando a cero ($\frac{dP_L}{dR_L} = 0$) se demuestra que la carga recibe la **potencia máxima posible** cuando su valor coincide exactamente con la resistencia de Thévenin:

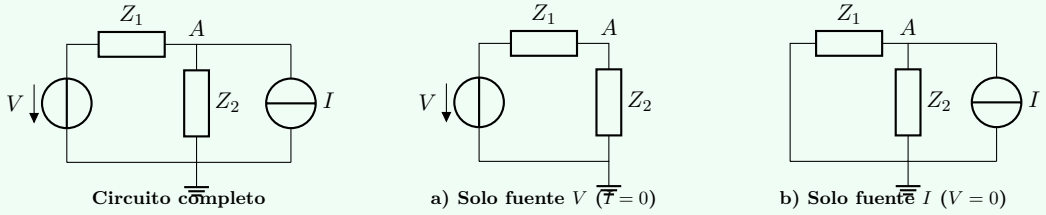
$$\boxed{R_L = R_{th} \implies P_{L,\text{máx}} = \frac{V_{th}^2}{4\,R_{th}}} \tag{2.25}$$

2.2.7 Principio de Superposición

El **Principio de Superposición** establece que en cualquier circuito lineal con varias fuentes independientes, la tensión o corriente en cualquier elemento es igual a la suma algebraica de las respuestas parciales obtenidas cuando actúa **cada una de las fuentes independientes por separado**, anulando todas las demás (fuentes de tensión en cortocircuito y fuentes de corriente en circuito abierto).

Ejemplo Explicado: Demostración paso a paso del Principio de Superposición

Sea el circuito de la figura con una fuente de tensión V, una fuente de intensidad I y dos elementos pasivos Z_1 y Z_2. Halla la tensión en el nudo A por superposición y compruébalo por el método de nudos:



Circuito completo — a) Solo fuente V ($I = 0$) — b) Solo fuente I ($V = 0$)

1. **a) Con la fuente de tensión V activa** (anulamos la fuente de corriente dejándola en abierto): Queda un divisor de tensión entre Z_1 y Z_2:

$$V_{A1} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}\,V$$

2. **b) Con la fuente de intensidad I activa** (anulamos la fuente de tensión con un cortocircuito): Los elementos Z_1 y Z_2 quedan en paralelo alimentados por la corriente I:

$$V_{A2} = I \cdot (Z_1 \parallel Z_2) = I\,\frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

3. **Sumando ambas contribuciones**:

$$\boxed{V_A = V_{A1} + V_{A2} = \frac{Z_2\,V + I\,Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}}$$

4. **Comprobación directa por nudos con las dos fuentes a la vez**:

$$I + \frac{V - V_A}{Z_1} = \frac{V_A}{Z_2} \implies I Z_1 + V - V_A = \frac{Z_1}{Z_2} V_A \implies \left(1 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) V_A = I Z_1 + V \implies V_A = \frac{Z_2\,V + I\,Z_1 Z}{Z_1 + Z_2}$$

2.3 Régimen Transitorio de Primer Orden: Carga y Descarga de un Condensador

Cuando en un circuito con condensadores o bobinas se acciona un conmutador o cambia el valor de una fuente, el circuito pasa por un **régimen transitorio** hasta alcanzar su nuevo estado estacionario.



Figura 2.9: Circuitos RC de primer orden durante la carga (izquierda) y la descarga (derecha) del condensador.

2.3.1 Deducción de la Ecuación de Descarga del Condensador

Supongamos que el condensador se ha cargado inicialmente a la tensión de la fuente, de modo que en $t = 0$ tenemos $v_C(0) = V$, y en ese instante desconectamos la fuente y conectamos el conjunto R-C a tierra:

1. Para $t > 0$, la ecuación de malla es:

$$0 = v_C(t) + i(t) \cdot R \tag{2.26}$$

2. Como la corriente es la misma que pasa por el condensador, $i(t) = i_C(t) = C\,\frac{dv_C(t)}{dt}$, obtenemos una ecuación diferencial ordinaria de primer orden:

$$0 = v_C(t) + RC\,\frac{dv_C(t)}{dt} \qquad \text{donde } \boxed{\tau = R \cdot C} \text{ es la } \textbf{constante de tiempo } [\text{s}] \tag{2.27}$$

3. Separando variables e integrando entre el instante inicial $t = 0$ ($v_C(0) = V$) y un instante genérico t:

$$\tau\,\frac{dv_C(t)}{dt} = -v_C(t) \implies \int_{v_C(0)}^{v_C(t)} \frac{dv_C(t)}{v_C(t)} = -\frac{1}{\tau}\int_0^t dt \tag{2.28}$$

$$\ln\left[v_C(t)\right] - \ln\left[v_C(0)\right] = -\frac{t}{\tau} \implies \ln\left(\frac{v_C(t)}{V}\right) = -\frac{t}{\tau} \implies \boxed{v_C(t) = V \cdot e^{-t/\tau}} \tag{2.29}$$

Cuanto mayor sea la resistencia R o la capacidad C, mayor será la constante de tiempo $\tau = RC$ y más tardará el condensador en descargarse. Se define el **tiempo de caída** (t_{fall}) como el tiempo que tarda la tensión en caer desde el 90 % (0,9 V) hasta el 10 % (0,1 V):

$$t_{90\,\%} = -\tau\ln(0{,}9) \approx 0{,}105\,\tau, \quad t_{10\,\%} = -\tau\ln(0{,}1) \approx 2{,}303\,\tau \implies \boxed{t_{\text{fall}} = t_{10\,\%} - t_{90\,\%} \approx 2{,}2\,\tau} \tag{2.30}$$

2.3.2 Deducción de la Ecuación de Carga del Condensador

Si el condensador está inicialmente descargado en $t = 0$ ($v_C(0) = 0$) y lo conectamos a la fuente de tensión continua V a través de la resistencia R:

1. La ecuación de malla para $t > 0$ es:

$$V = i(t) \cdot R + v_C(t) = RC\,\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) \implies V - v_C(t) = \tau\,\frac{dv_C(t)}{dt} \tag{2.31}$$

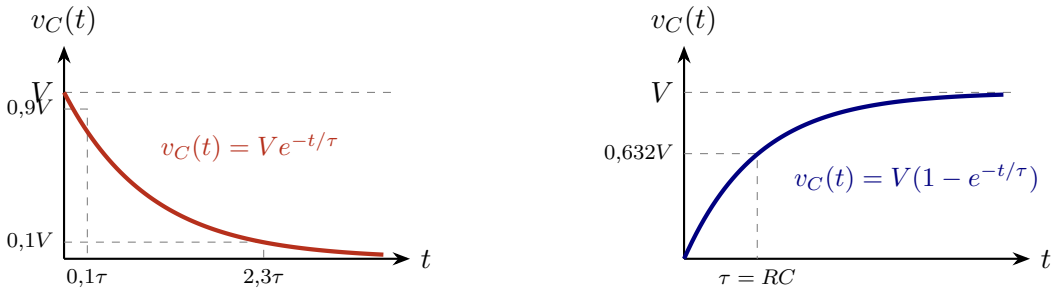
2. Separando variables e integrando desde $t = 0$ ($v_C(0) = 0$) hasta t:

$$\int_0^t -\frac{1}{\tau}\,dt = \int_0^{v_C(t)} \frac{dv_C(t)}{v_C(t) - V} \implies -\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{v_C(t) - V}{v_C(0) - V}\right) = \ln\left(\frac{v_C(t) - V}{-V}\right) \tag{2.32}$$

3. Tomando exponenciales y despejando $v_C(t)$:

$$\frac{v_C(t) - V}{-V} = e^{-t/\tau} \implies v_C(t) - V = -V\,e^{-t/\tau} \implies \boxed{v_C(t) = V\left(1 - e^{-t/\tau}\right)} \tag{2.33}$$

La corriente de carga disminuye exponencialmente: $i(t) = C\frac{dv_C}{dt} = \frac{V}{R}\,e^{-t/\tau}$. Para $t = \tau$, el condensador ha alcanzado el 63,2 % de su tensión final, y para $t \approx 5\tau$ se considera totalmente cargado (99,3 %).



Curva de Descarga ($t_{\text{fall}} \approx 2{,}2\tau$) **Curva de Carga** ($\tau = RC$)

Figura 2.10: Evolución temporal de la tensión $v_C(t)$ durante la descarga (izquierda) y la carga (derecha) de un condensador.

Ley / Teorema: Fórmula Universal de Transitorios de Primer Orden (RC y RL)

En cualquier circuito de primer orden con un único elemento almacenador (condensador C con $\tau = R_{th}C$, o bobina L con $\tau = \frac{L}{R_{th}}$), la evolución temporal de cualquier tensión o corriente para $t \geq 0^+$ responde a la expresión universal:

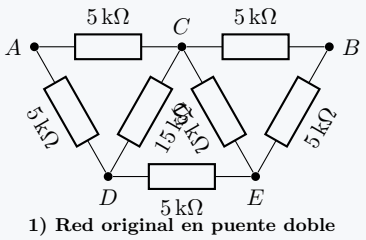
$$\boxed{x(t) = x(\infty) + \left[x(0^+) - x(\infty)\right] e^{-t/\tau}, \qquad t \geq 0^+} \tag{2.34}$$

donde $x(0^+)$ se obtiene por continuidad ($v_C(0^+) = v_C(0^-)$ o $i_L(0^+) = i_L(0^-)$) y $x(\infty)$ es el valor en régimen estacionario para $t \to \infty$.

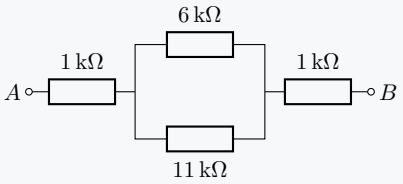
2.4 Ejercicios de Clase y Exámenes Resueltos Paso a Paso

Ejercicio Resuelto: Asociación de resistencias y Teorema de Kennelly (Ejercicio 3)

Calcula la resistencia equivalente R_{AB} entre los terminales A y B en las tres asociaciones de resistencias de las figuras siguientes (corregidas en clase):
Apartado 1: Red en puente doble con resistencias de 5 kΩ y 15 kΩ.



1) Red original en puente doble



2) Red tras aplicar Kennelly

Resolución del Apartado 1:

- Aplicamos el **Teorema de Kennelly** ($\Delta \to$ Y) a los dos triángulos laterales ACD y CBE (ambos formados por lados de $5\,\text{k}\Omega$, $5\,\text{k}\Omega$ y $15\,\text{k}\Omega$, cuya suma es $5+5+15=25\,\text{k}\Omega$):

$$R_a = \frac{5\cdot 5}{25} = 1\,\text{k}\Omega, \qquad R_c = \frac{5\cdot 15}{25} = 3\,\text{k}\Omega, \qquad R_d = \frac{5\cdot 15}{25} = 3\,\text{k}\Omega$$

- Al sustituir ambos triángulos por sus estrellas equivalentes:
  - La rama superior entre los centros de ambas estrellas tiene dos resistencias de $3\,\text{k}\Omega$ en serie: $3+3=6\,\text{k}\Omega$.
  - La rama inferior que pasa por D-E tiene tres resistencias en serie ($3\,\text{k}\Omega + 5\,\text{k}\Omega + 3\,\text{k}\Omega = 11\,\text{k}\Omega$).
- Calculamos el paralelo central $R_p = 6\,\text{k}\Omega \parallel 11\,\text{k}\Omega$ y sumamos las dos resistencias exteriores de $1\,\text{k}\Omega$:

$$R_p = \frac{6\cdot 11}{6+11} = \frac{66}{17}\,\text{k}\Omega \implies \boxed{R_T = 1\,\text{k}\Omega + \frac{66}{17}\,\text{k}\Omega + 1\,\text{k}\Omega = \frac{100}{17}\,\text{k}\Omega \approx 5{,}88\,\text{k}\Omega}$$

Apartado 2: En el mismo puente, si los terminales de entrada son los nudos inferiores A y B (con una resistencia de $6\,\text{k}\Omega$ directamente conectada entre A y B, y los nudos superiores C y E al aire):

- **Forma 1 (Asociación serie-paralelo directa)**: Los lados exteriores superiores ($5\,\text{k}\Omega + 5\,\text{k}\Omega = 10\,\text{k}\Omega$) quedan en paralelo con las diagonales de $15\,\text{k}\Omega$:

$$10\,\text{k}\Omega \parallel 15\,\text{k}\Omega = \frac{10\cdot 15}{10+15} = 6\,\text{k}\Omega$$

  Las dos ramas resultantes de $6\,\text{k}\Omega$ quedan en serie ($6+6=12\,\text{k}\Omega$) y en paralelo con la base de $6\,\text{k}\Omega$ entre A y B:

$$\boxed{R_{AB} = 12\,\text{k}\Omega \parallel 6\,\text{k}\Omega = \frac{12\cdot 6}{12+6} = 4\,\text{k}\Omega}$$

- **Forma 2 (Por Kennelly)**: Transformando los dos triángulos superiores en estrellas ($1\,\text{k}\Omega, 3\,\text{k}\Omega, 3\,\text{k}\Omega$), las puntas de $1\,\text{k}\Omega$ en C y E quedan al aire (no circula corriente por ellas), quedando cuatro resistencias de $3\,\text{k}\Omega$ en serie ($3+3+3+3 = 12\,\text{k}\Omega$) en paralelo con la base de $6\,\text{k}\Omega$: $R_{AB} = 12\,\text{k}\Omega \parallel 6\,\text{k}\Omega = 4\,\text{k}\Omega$.

Apartado 4: Red vertical entre A y B con una resistencia superior de $9\,\text{k}\Omega$ en serie con un puente formado por un triángulo superior ($10\,\text{k}\Omega, 10\,\text{k}\Omega, 5\,\text{k}\Omega$) y dos ramas inferiores de $20\,\text{k}\Omega$ y $9\,\text{k}\Omega$:

- Transformamos el triángulo superior ($10\,\text{k}\Omega, 10\,\text{k}\Omega, 5\,\text{k}\Omega$, suma $= 25\,\text{k}\Omega$) en estrella:

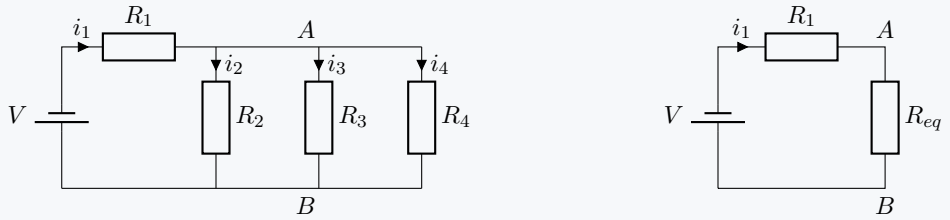
$$R_c = \frac{10 \cdot 10}{25} = 4\,\text{k}\Omega, \qquad R_d = \frac{10 \cdot 5}{25} = 2\,\text{k}\Omega, \qquad R_e = \frac{10 \cdot 5}{25} = 2\,\text{k}\Omega$$

- Sumando en serie: arriba queda $9\,\text{k}\Omega + 4\,\text{k}\Omega = 13\,\text{k}\Omega$, y en las dos ramas paralelas inferiores quedan $(2+20)\,\text{k}\Omega = 22\,\text{k}\Omega$ en paralelo con $(2+9)\,\text{k}\Omega = 11\,\text{k}\Omega$:

$$22\,\text{k}\Omega \parallel 11\,\text{k}\Omega = \frac{22 \cdot 11}{33} = \frac{22}{3}\,\text{k}\Omega \approx 7{,}33\,\text{k}\Omega \implies \boxed{R_{AB} = 13 + 7{,}33 = 20{,}33\,\text{k}\Omega}$$

Ejercicio Resuelto: Cálculo de corrientes, potencias y balance energético (Ejercicio 9)

Calcula la corriente en cada rama y la potencia disipada por cada resistencia en el circuito de la figura, sabiendo que $V = 12\,\text{V}$, $R_1 = 2\,\text{k}\Omega$ y $R_2 = R_3 = R_4 = 6\,\text{k}\Omega$. Comprueba el balance de potencias.



Resolución paso a paso:

1. **Asociación de las tres resistencias en paralelo** (R_2, R_3, R_4):

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}\,\text{k}\Omega^{-1} \implies \boxed{R_{eq} = 2\,\text{k}\Omega}$$

2. **Cálculo de la corriente principal i_1 y de las corrientes de rama**:

$$i_1 = \frac{V}{R_1 + R_{eq}} = \frac{12\,\text{V}}{2\,\text{k}\Omega + 2\,\text{k}\Omega} = \frac{12\,\text{V}}{4\,\text{k}\Omega} = 3\,\text{mA}$$

La tensión entre A y B es $V_{AB} = i_1 \cdot R_{eq} = 3\,\text{mA} \cdot 2\,\text{k}\Omega = 6\,\text{V}$. Como $R_2 = R_3 = R_4 = 6\,\text{k}\Omega$:

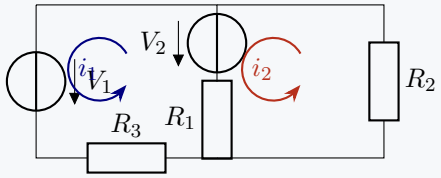
$$i_2 = i_3 = i_4 = \frac{V_{AB}}{R_2} = \frac{6\,\text{V}}{6\,\text{k}\Omega} = 1\,\text{mA} \qquad \text{(se cumple LCK: } 3\,\text{mA} = 1 + 1 + 1\,\text{mA)}$$

3. **Potencias disipadas y balance de potencia**:

$$P_2 = P_3 = P_4 = i_2 \cdot V_{AB} = 1\,\text{mA} \cdot 6\,\text{V} = 6\,\text{mW}$$
$$P_1 = i_1 \cdot V_{R1} = 3\,\text{mA} \cdot 6\,\text{V} = 18\,\text{mW}$$
$$P_{\text{disipada}} = 3 \cdot 6\,\text{mW} + 18\,\text{mW} = 36\,\text{mW} = P_{\text{fuente}} = V \cdot i_1 = 12\,\text{V} \cdot 3\,\text{mA} = \boxed{36\,\text{mW}}$$

Ejercicio Resuelto: Análisis completo por mallas y balance de potencias (Ejercicio 10)

Calcula la corriente en cada rama y la potencia disipada por cada resistencia del siguiente circuito con $V_1 = 7\,\text{V}$, $V_2 = 5\,\text{V}$, $R_1 = 3\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 1\,\text{k}\Omega$ y $R_3 = 2\,\text{k}\Omega$:



Resolución paso a paso:

1. **Establecemos el sentido antihorario para las corrientes de malla i_1 e i_2** (tal como indica la figura de clase) y planteamos las ecuaciones de malla:

$$V_1 + V_2 = i_1 R_3 + (i_1 + i_2)R_1 \implies V_1 + V_2 = (R_1 + R_3)i_1 + R_1 i_2 \implies 12 = 5i_1 + 3i_2$$
$$V_2 = (i_1 + i_2)R_1 + i_2 R_2 \implies V_2 = R_1 i_1 + (R_1 + R_2)i_2 \implies 5 = 3i_1 + 4i_2$$

2. **Resolución matricial por Cramer:**

$$\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \end{pmatrix} \implies i_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{48 - 15}{20 - 9} = \frac{33}{11} = \boxed{3\,\text{mA}}, \qquad i_2 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 5 \end{vmatrix}}{11} = \frac{25 - 36}{11} =$$

3. **Corrientes por cada resistencia:**

$$i_{R1} = i_1 + i_2 = 3 - 1 = 2\,\text{mA}, \qquad i_{R2} = i_2 = -1\,\text{mA}, \qquad i_{R3} = i_1 = 3\,\text{mA}$$

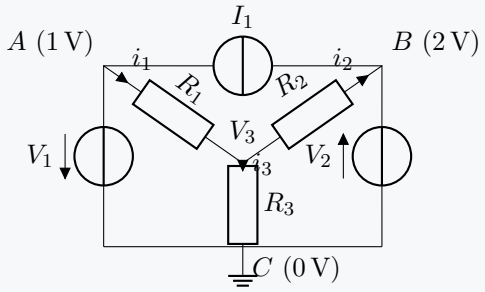
4. **Cálculo de potencias en resistencias y fuentes:**

$$P_{R1} = i_{R1}^2 R_1 = (2\,\text{mA})^2 \cdot 3\,\text{k}\Omega = 12\,\text{mW}$$
$$P_{R2} = i_{R2}^2 R_2 = (-1\,\text{mA})^2 \cdot 1\,\text{k}\Omega = 1\,\text{mW}$$
$$P_{R3} = i_{R3}^2 R_3 = (3\,\text{mA})^2 \cdot 2\,\text{k}\Omega = 18\,\text{mW} \implies P_{\text{total},R} = 12 + 1 + 18 = \boxed{31\,\text{mW}}$$

$$P_{V1} = V_1 \cdot i_1 = 7\,\text{V} \cdot 3\,\text{mA} = 21\,\text{mW}, \quad P_{V2} = V_2 \cdot i_{R1} = 5\,\text{V} \cdot 2\,\text{mA} = 10\,\text{mW} \implies P_{\text{total},V} = \boxed{31\,\text{mW}}$$

Ejercicio Resuelto: Resolución por nudos con fuente de intensidad y fuentes de tensión (Ejercicio 12)

Calcula el valor del potencial V_3, las corrientes de rama y el balance de potencias en el circuito de la figura, con $R_1 = R_2 = R_3 = 1\,\text{k}\Omega$, $I_1 = 2\,\text{mA}$, $V_1 = 1\,\text{V}$ y $V_2 = 2\,\text{V}$:



Resolución paso a paso:

1. **Referenciamos el nudo inferior C a tierra ($V_C = 0\,\text{V}$)**: Automáticamente las fuentes de tensión fijan los potenciales de los nudos superiores: $V_A = 1\,\text{V}$ y $V_B = 2\,\text{V}$.

2. **Aplicamos la Ley de Kirchhoff de corrientes (LCK) en el nudo central V_3**:

$$i_1 + i_2 = i_3 \implies \frac{V_A - V_3}{R_1} + \frac{V_B - V_3}{R_2} = \frac{V_3 - 0}{R_3} \implies \frac{1 - V_3}{1} + \frac{2 - V_3}{1} = \frac{V_3}{1} \implies 3 = 3V_3 \implies \boxed{V_3 = 1}$$

3. **Cálculo de las intensidades en las resistencias y en las fuentes**:

$$i_1 = \frac{1-1}{1\,\text{k}\Omega} = 0\,\text{mA}, \qquad i_2 = \frac{2-1}{1\,\text{k}\Omega} = 1\,\text{mA}, \qquad i_3 = i_1 + i_2 = 1\,\text{mA}$$

   En el nudo A, como por R_1 van 0 mA y de la fuente I_1 llegan 2 mA hacia la izquierda, toda esa corriente baja entrando por el polo + de V_1 ($I_{V1} = 2\,\text{mA}$ hacia abajo). En el nudo B, salen 2 mA hacia I_1 y 1 mA hacia R_2, luego la fuente V_2 entrega $I_{V2} = 3\,\text{mA}$ hacia arriba.

4. **Balance de potencias**:

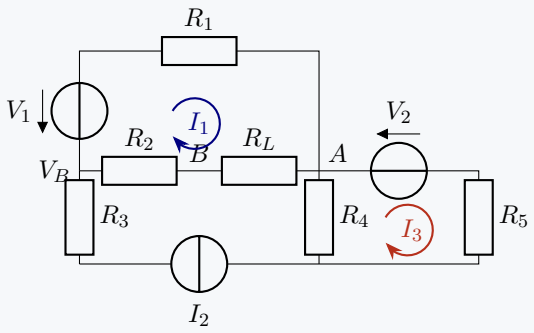
   - En las resistencias: $P_{R1} = 0\,\text{mW}$, $P_{R2} = 1\,\text{V} \cdot 1\,\text{mA} = 1\,\text{mW}$, $P_{R3} = 1\,\text{V} \cdot 1\,\text{mA} = 1\,\text{mW} \implies P_{\text{total},R} = \boxed{2\,\text{mW}}$.
   - En las fuentes: $P_{V1} = -1\,\text{V} \cdot 2\,\text{mA} = -2\,\text{mW}$ (absorbe), $P_{V2} = 2\,\text{V} \cdot 3\,\text{mA} = 6\,\text{mW}$ (cede), $P_{I1} = (V_A - V_B) \cdot I_1 = (1-2)\,\text{V} \cdot 2\,\text{mA} = -2\,\text{mW}$ (absorbe) $\implies P_{\text{total,fuentes}} = -2 + 6 - 2 = \boxed{2\,\text{mW}}$.

Ejercicio Resuelto: Análisis de carga y equivalente de Thévenin/Norton (Ejercicio 7)

En el circuito de la figura se conocen $R_1 = 6\,\text{k}\Omega$, $R_2 = 12\,\text{k}\Omega$, $R_3 = R_4 = R_5 = R_L = 10\,\text{k}\Omega$, $I_2 = 0{,}5\,\text{mA}$, $V_1 = 10\,\text{V}$ y $V_2 = 20\,\text{V}$:

a) Calcula la corriente que atraviesa la resistencia de carga R_L, así como la caída de tensión entre sus extremos A y B.

b) Calcula el equivalente Thévenin y Norton del circuito entre los puntos A y B, siendo R_L la carga del circuito, y comprueba el resultado del apartado anterior.



Resolución paso a paso:

1. **Apartado a)**: Como la fuente de corriente inferior fija directamente la corriente de la malla inferior izquierda en $I_2 = 0{,}5\,\text{mA}$ (en sentido horario), para hallar I_1 basta plantear la ecuación de la malla superior izquierda:

   $$V_1 = I_1R_1 + (I_1 - I_2)R_L + (I_1 - I_2)R_2 = (R_1 + R_2 + R_L)I_1 - (R_2 + R_L)I_2$$

   Sustituyendo los valores ($R_1+R_2+R_L = 6+12+10 = 28\,\text{k}\Omega$ y $R_2+R_L = 22\,\text{k}\Omega$):

   $$10 = 28I_1 - 22 \cdot 0{,}5 \implies 28I_1 = 21 \implies I_1 = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}\,\text{mA} = 0{,}75\,\text{mA}$$

   La intensidad que atraviesa R_L (de A hacia B) y la caída de tensión $V_A - V_B$ son:

   $$\boxed{I_{RL} = I_1 - I_2 = 0{,}75 - 0{,}50 = 0{,}25\,\text{mA}}, \qquad \boxed{V_A - V_B = I_{RL} \cdot R_L = 0{,}25\,\text{mA} \cdot 10\,\text{k}\Omega = 2{,}5\,\text{V}}$$

2. **Apartado b) Equivalente de Thévenin entre A y B (desconectando R_L)**:

   - **Tensión de Thévenin (V_{th})**: Al abrir el tramo A-B, por la resistencia R_2 no circula corriente ($I_{R2} = 0 \implies V_{\text{izq}} = V_B$), y toda la corriente $I_2 = 0{,}5\,\text{mA}$ se ve obligada a subir por la malla superior pasando por R_1 desde $V_B + 10\,\text{V}$ hacia A:

     $$V_A = (V_B{+}10\,\text{V}) - I_2{\cdot}R_1 = V_B{+}10{-}0{,}5\,\text{mA}{\cdot}6\,\text{k}\Omega = V_B{+}7\,\text{V} \implies \boxed{V_{th} = V_A - V_B = 7\,\text{V}}$$

   - **Resistencia de Thévenin (R_{th})**: Anulamos las fuentes (V_1 y V_2 en cortocircuito, I_2 en circuito abierto). Al quedar abierta la rama inferior de I_2, las resistencias R_3, R_4, R_5 no cierran camino entre A y B, quedando únicamente R_1 y R_2 en serie:

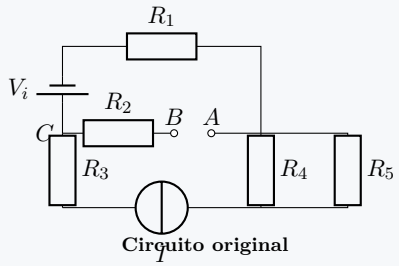
     $$\boxed{R_{th} = R_1 + R_2 = 6\,\text{k}\Omega + 12\,\text{k}\Omega = 18\,\text{k}\Omega} \qquad \left(I_N = \frac{V_{th}}{R_{th}} = \frac{7}{18}\,\text{mA}\right)$$

   - **Comprobación conectando $R_L = 10\,\text{k}\Omega$ al equivalente de Thévenin**:

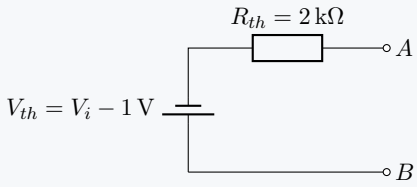
     $$I_{RL} = \frac{V_{th}}{R_{th} + R_L} = \frac{7\,\text{V}}{18\,\text{k}\Omega + 10\,\text{k}\Omega} = 0{,}25\,\text{mA}, \qquad V_{AB} = 0{,}25\,\text{mA}{\cdot}10\,\text{k}\Omega = 2{,}5\,\text{V} \quad \text{(OK)}$$

Ejercicio Resuelto: Equivalente de Thévenin en función de un parámetro V_i (Ejercicio 8)

Calcula el circuito equivalente de Thévenin entre los terminales A y B del siguiente circuito en función de la tensión V_i, sabiendo que $I = 1\,\text{mA}$, $R_1 = R_2 = R_3 = 1\,\text{k}\Omega$ y $R_4 = R_5 = 2\,\text{k}\Omega$:



Cirquito original



Equivalente Thévenin resultante

Resolución paso a paso:

1. **Cálculo de la tensión de Thévenin ($V_{th} = V_A - V_B$)**:
   - Como los terminales A y B están en circuito abierto, por la resistencia R_2 no circula corriente ($I_{R2} = 0$), de modo que el potencial en B es idéntico al potencial en C: $V_B = V_C \implies V_{th} = V_A - V_C$.
   - Agrupando $R_4 \parallel R_5 = 2\,\text{k}\Omega \parallel 2\,\text{k}\Omega = 1\,\text{k}\Omega$, la fuente de intensidad inferior $I = 1\,\text{mA}$ obliga a que por toda la malla exterior (R_3, V_i, R_1 y $R_4 \parallel R_5$) circule exactamente la corriente $I = 1\,\text{mA}$ en sentido horario.
   - Por tanto, partiendo del nudo C, subiendo por la fuente V_i y restando la caída en R_1:

$$V_A - V_C = V_i - I \cdot R_1 = V_i - (1\,\text{mA})(1\,\text{k}\Omega) \implies \boxed{V_{th} = V_i - 1\,\text{V}}$$

2. **Cálculo de la resistencia de Thévenin (R_{th})**:
   - Anulando la fuente de tensión V_i (cortocircuito) y la fuente de intensidad I (circuito abierto), las ramas inferiores quedan abiertas y vistas desde A y B solo quedan en serie las resistencias R_1 y R_2:

$$\boxed{R_{th} = R_1 + R_2 = 1\,\text{k}\Omega + 1\,\text{k}\Omega = 2\,\text{k}\Omega}$$

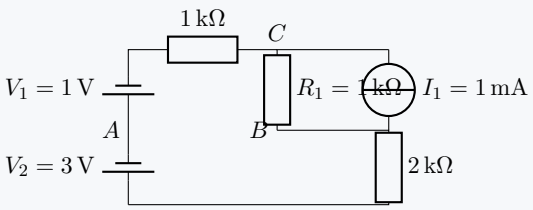
Ejercicio Resuelto: Equivalente de Thévenin mediante transformación de fuentes (Ejercicio 14)

Para el circuito de la figura ($V_1 = 1\,\text{V}, V_2 = 3\,\text{V}, I_1 = 1\,\text{mA}, R_1 = 1\,\text{k}\Omega$):

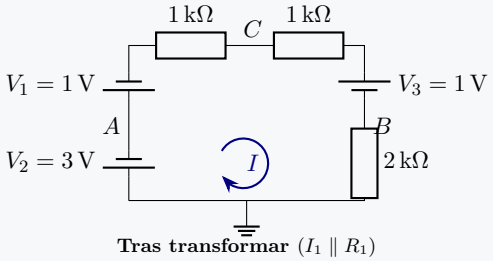
a) Calcula el equivalente de Thévenin entre los terminales A y B.

b) Calcula la caída de tensión V_{CB} entre los nudos C y B.

c) ¿Qué potencia se disipa en la resistencia R_1?



Circuito original



Tras transformar ($I_1 \parallel R_1$)

Resolución paso a paso:

1. **Apartado a)**: Transformamos el paralelo formado por la fuente de corriente $I_1 = 1\,\text{mA}$ y la resistencia $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$ entre C y B en su fuente de tensión equivalente en serie: $V_3 = I_1 \cdot R_1 = 1\,\text{mA} \cdot 1\,\text{k}\Omega = 1\,\text{V}$ en serie con $1\,\text{k}\Omega$.

   - Queda una única malla con resistencias en serie ($1 + 1 + 2 = 4\,\text{k}\Omega$):

   $$V_1 + V_2 - V_3 = I\,(1 + 1 + 2)\,\text{k}\Omega \implies I = \frac{1 + 3 - 1}{4\,\text{k}\Omega} = \frac{3}{4}\,\text{mA} = 0{,}75\,\text{mA}$$

   - Referenciando el cable inferior a tierra ($0\,\text{V}$):

   $$V_A = 3\,\text{V}, \quad V_B = I{\cdot}2\,\text{k}\Omega = \frac{3}{4}\,\text{mA}{\cdot}2\,\text{k}\Omega = \frac{3}{2}\,\text{V} \implies \boxed{V_{th} = V_A - V_B = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\,\text{V} = 1{,}5\,\text{V}}$$

   - Anulando las fuentes en el circuito original (V_1, V_2 en cortocircuito e I_1 en abierto), entre A y B quedan la rama superior ($1\,\text{k}\Omega + 1\,\text{k}\Omega = 2\,\text{k}\Omega$) en paralelo con la rama inferior de $2\,\text{k}\Omega$:

   $$\boxed{R_{th} = 2\,\text{k}\Omega \parallel 2\,\text{k}\Omega = 1\,\text{k}\Omega}$$

2. **Apartado b) Caída de tensión** V_{CB}: En la rama transformada entre C y B:

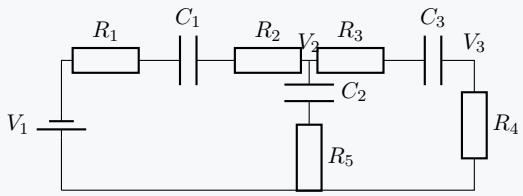
   $$\boxed{V_{CB} = V_3 + I \cdot 1\,\text{k}\Omega = 1\,\text{V} + \frac{3}{4}\,\text{mA} \cdot 1\,\text{k}\Omega = \frac{7}{4}\,\text{V} = 1{,}75\,\text{V}}$$

3. **Apartado c) Potencia disipada en la resistencia** R_1 **original**: Como $R_1 = 1\,\text{k}\Omega$ está conectada directamente entre C y B, soporta la tensión $V_{CB} = \frac{7}{4}\,\text{V}$ (por ella bajan $\frac{7}{4}\,\text{mA}$):

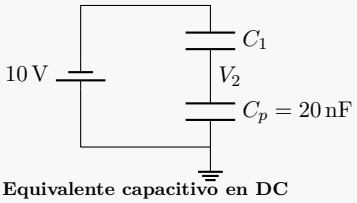
   $$\boxed{P_{R1} = \frac{V_{CB}^2}{R_1} = \frac{(7/4\,\text{V})^2}{1\,\text{k}\Omega} = \frac{49}{16}\,\text{mW} \approx 3{,}06\,\text{mW}}$$ (o en la equivalente de la malla: $V_{CB} \cdot I_1 = \frac{7}{4}\,\text{mW}$

Ejercicio Resuelto: Divisor capacitivo en corriente continua (Ejercicio 17)

Calcula el potencial V_2 en régimen permanente de corriente continua en el circuito de la figura, sabiendo que $V_1 = 10\,\text{V}$, $C_1 = 1\,\text{nF}$ y $C_2 = C_3 = 10\,\text{nF}$:



Circuito RC mixto



Equivalente capacitivo en DC

Resolución paso a paso:

1. En corriente continua (DC), una vez cargados los condensadores **no circula corriente por ninguna rama** ($I = 0$). Al ser $I = 0$, no hay caída de tensión en ninguna de las resistencias ($V_R = I \cdot R = 0$), por lo que podemos eliminar todas las resistencias (sustituirlas por cables ideales) para ver cómo se reparten los 10 V entre los condensadores.

2. Al hacerlo, los condensadores C_2 y C_3 quedan conectados en **paralelo** entre el nudo V_2 y tierra (0 V):

$$C_p = C_2 + C_3 = 10\,\text{nF} + 10\,\text{nF} = 20\,\text{nF}$$

3. Este condensador equivalente $C_p = 20\,\text{nF}$ queda en **serie** con $C_1 = 1\,\text{nF}$. Como dos condensadores en serie almacenan exactamente la **misma carga** q:

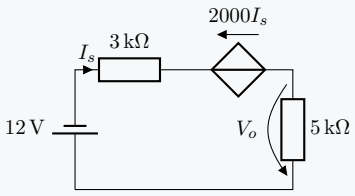
$$10\,\text{V} = V_{C1}+V_2 = \frac{q}{C_1}+\frac{q}{C_p} = \frac{C_1+C_p}{C_1C_p}\,q \implies q = \frac{C_1C_p}{C_1+C_p}\cdot 10\,\text{V} = \frac{1\cdot 20}{1+20}\cdot 10 = \frac{200}{21}\,\text{nC}$$

4. Conocida la carga q, la tensión en el nudo V_2 es:

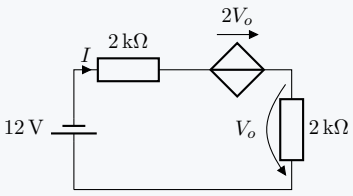
$$\boxed{V_2 = \frac{q}{C_p} = \frac{200/21\,\text{nC}}{20\,\text{nF}} = \frac{10}{21}\,\text{V} \approx 0{,}476\,\text{V}}$$

Ejercicio Resuelto: Circuitos con fuentes dependientes (Ejercicio 19, apartados a, b y c)

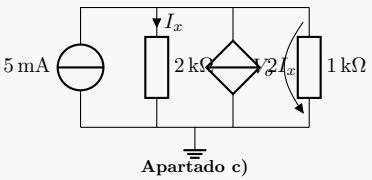
Calcula la tensión de salida V_o en cada uno de los tres circuitos con fuentes controladas de la figura (recuerda expresar las resistencias en ohmios cuando la ganancia de una fuente controlada por corriente viene en V/A):



Apartado a)



Apartado b)



Apartado c)

Resolución paso a paso:

- **Apartado a)**: Ponemos las resistencias en ohmios ($3\,\text{k}\Omega + 5\,\text{k}\Omega = 8000\,\Omega$) y planteamos la ecuación de la única malla en sentido horario:

$$12 + 2000\,I_s = I_s \cdot (3000 + 5000) \implies 12 = 6000\,I_s \implies I_s = \frac{12}{6000} = 2\,\text{mA}$$

Por tanto, la tensión de salida en la resistencia de $5\,\text{k}\Omega$ es:

$$\boxed{V_o = I_s \cdot 5\,\text{k}\Omega = 2\,\text{mA} \cdot 5\,\text{k}\Omega = 10\,\text{V}}$$

- **Apartado b)**: Planteamos la ecuación de malla en sentido horario ($2\,\text{k}\Omega + 2\,\text{k}\Omega = 4\,\text{k}\Omega$) y la ecuación de control $V_o = I \cdot 2\,\text{k}\Omega$:

$$12 - 2V_o = I \cdot 4\,\text{k}\Omega \xrightarrow{V_o = 2\,\text{k}\Omega \cdot I} 12 - 4I = 4I \implies 12 = 8I \implies I = \frac{3}{2}\,\text{mA} = 1{,}5\,\text{mA}$$

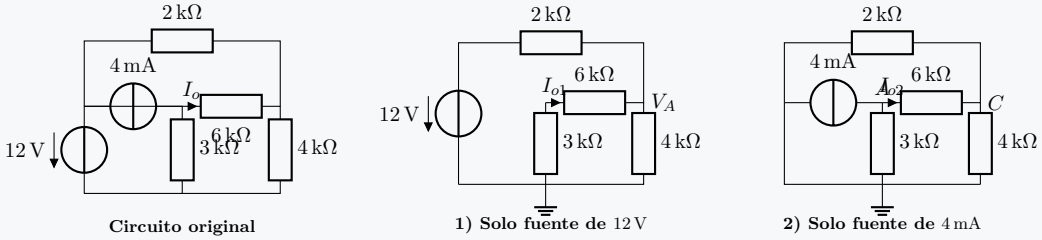
$$\boxed{V_o = I \cdot 2\,\text{k}\Omega = \frac{3}{2}\,\text{mA} \cdot 2\,\text{k}\Omega = 3\,\text{V}}$$

- **Apartado c)**: Todos los elementos están en paralelo entre el nudo superior (con potencial V_o) y tierra ($0\,\text{V}$). Aplicamos LCK en el nudo superior y sustituimos $I_x = \frac{V_o}{2\,\text{k}\Omega}$:

$$5\,\text{mA} = I_x + 2I_x + \frac{V_o}{1\,\text{k}\Omega} = 3I_x + \frac{V_o}{1\,\text{k}\Omega} = \frac{3V_o}{2\,\text{k}\Omega} + \frac{V_o}{1\,\text{k}\Omega} = \frac{5V_o}{2\,\text{k}\Omega} \implies \boxed{V_o = \frac{10}{5} = 2\,\text{V}}$$

Ejercicio Resuelto: Aplicación del Principio de Superposición (Ejercicio 20)

Encuentra el valor de la corriente I_o que atraviesa la resistencia de $6\,\text{k}\Omega$ en el circuito de la figura utilizando el Principio de Superposición:



Resolución paso a paso:

1. **Paso 1: Con la fuente de tensión de $12\,\text{V}$ activa** (anulamos la fuente de $4\,\text{mA}$ dejándola en circuito abierto):
   - Desde el nudo V_A hacia tierra quedan dos ramas en paralelo: la resistencia de $4\,\text{k}\Omega$ y la serie ($6\,\text{k}\Omega + 3\,\text{k}\Omega = 9\,\text{k}\Omega$):

$$R_p = 4\,\text{k}\Omega \parallel 9\,\text{k}\Omega = \frac{4 \cdot 9}{4 + 9} = \frac{36}{13}\,\text{k}\Omega$$

   - Por divisor de tensión con la resistencia superior de $2\,\text{k}\Omega$:

$$V_A = \frac{R_p}{2 + R_p} \cdot 12\,\text{V} = \frac{36/13}{2 + 36/13} \cdot 12 = \frac{432}{62} \approx 6{,}97\,\text{V}$$

   - Como la corriente I_{o1} está definida hacia la derecha (hacia V_A) y por la rama serie de $9\,\text{k}\Omega$ la corriente va de V_A a tierra:

$$I_{o1} = \frac{0 - V_A}{6\,\text{k}\Omega + 3\,\text{k}\Omega} = -\frac{6{,}97\,\text{V}}{9\,\text{k}\Omega} \approx -0{,}77\,\text{mA}$$

2. **Paso 2: Con la fuente de intensidad de** $4\,\text{mA}$ **activa** (cortocircuitamos la fuente de $12\,\text{V}$ a tierra):

   - Al quedar el terminal izquierdo puesto a tierra ($0\,\text{V}$), las resistencias de $4\,\text{k}\Omega$ y $2\,\text{k}\Omega$ quedan en paralelo entre el nudo C y tierra:

$$4\,\text{k}\Omega \parallel 2\,\text{k}\Omega = \frac{4\cdot 2}{4+2} = \frac{4}{3}\,\text{k}\Omega$$

   - Esta combinación queda en serie con la resistencia de $6\,\text{k}\Omega$ ($6+\frac{4}{3}=\frac{22}{3}\,\text{k}\Omega$) y todo ello en paralelo con la resistencia de $3\,\text{k}\Omega$:

$$R_{eq,A} = 3\,\text{k}\Omega \parallel \frac{22}{3}\,\text{k}\Omega = \frac{3\cdot\frac{22}{3}}{3+\frac{22}{3}} = \frac{22}{31}\,\text{k}\Omega$$

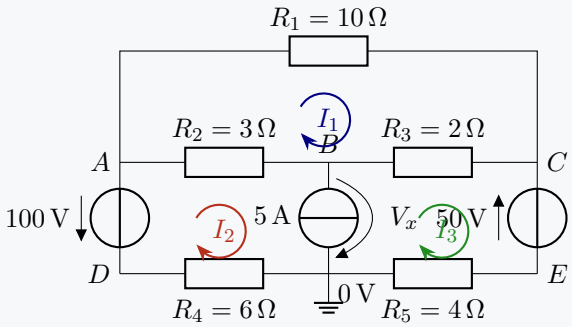
   - La tensión en el nudo A y la corriente I_{o2} son:

$$V_A = 4\,\text{mA}\cdot\frac{22}{31}\,\text{k}\Omega = \frac{88}{31}\,\text{V} \approx 2{,}84\,\text{V} \implies I_{o2} = \frac{V_A}{\frac{22}{3}\,\text{k}\Omega} = \frac{88/31}{22/3} = \frac{12}{31}\,\text{mA} \approx 0{,}387\,\text{mA}$$

   (Nota: Si en el cálculo intermedio se tomase $V_A = 8{,}51\,\text{V}$ *como aparece anotado en el cuaderno manuscrito, saldría* $I_{o2} = 1{,}16\,\text{mA} \implies I_{o,total} = -0{,}77 + 1{,}16 = 0{,}39\,\text{mA}$*; con el valor exacto* $V_A = \frac{88}{31}\,\text{V}$*, resulta* $I_{o,total} = -\frac{24}{31} + \frac{12}{31} = -\frac{12}{31}\,\text{mA} \approx -0{,}387\,\text{mA}$*).*

Ejercicio Resuelto: Problema Completo de Examen 2019: Mallas, Nudos y Balance de Potencias

En el circuito de examen de la figura, calcula todas las intensidades de malla y de rama, los potenciales de todos los nudos (V_A, V_B, V_C, V_D, V_E), las caídas de tensión en las cinco resistencias y el balance completo de potencias entre resistencias y fuentes:



Resolución paso a paso:

1. **Planteamiento por el método de mallas (con supermalla inferior)**: Asignamos I_1, I_2, I_3 en sentido horario y llamamos $V_x = V_B - 0$ a la tensión en bornes de la fuente de intensidad de $5\,\text{A}$:

$$\text{Malla 1 (superior):} \quad 0 = (10+3+2)I_1 - 3I_2 - 2I_3 \implies 0 = 15I_1 - 3I_2 - 2I_3 \tag{2.35}$$

$$\text{Malla 2 (izquierda):} \quad 100 = -3I_1 + (3+6)I_2 + V_x = -3I_1 + 9I_2 + V_x \tag{2.36}$$

$$\text{Malla 3 (derecha):} \quad -50 = -2I_1 + (2+4)I_3 - V_x = -2I_1 + 6I_3 - V_x \tag{2.37}$$

2. **Eliminación de V_x (ecuación de la supermalla) y relación de la fuente de corriente**:

   - Sumando (2.36) y (2.37):

   $$50 = -5I_1 + 9I_2 + 6I_3 \xrightarrow{\times 3} 150 = -15I_1 + 27I_2 + 18I_3$$

   - Sumándole la ecuación (2.35) ($0 = 15I_1 - 3I_2 - 2I_3$) desaparece I_1:

   $$150 = 24I_2 + 16I_3$$

   - Además, en la rama central la fuente de 5 A impone directamente:

   $$I_3 - I_2 = 5 \implies I_3 = 5 + I_2$$

   - Sustituyendo $I_3 = 5 + I_2$:

   $$150 = 24I_2 + 16(5 + I_2) = 40I_2 + 80 \implies 40I_2 = 70 \implies \boxed{I_2 = 1{,}75\,\text{A}}$$

   $$\boxed{I_3 = 5 + 1{,}75 = 6{,}75\,\text{A}}, \qquad \boxed{I_1 = \frac{3(1{,}75) + 2(6{,}75)}{15} = \frac{18{,}75}{15} = 1{,}25\,\text{A}}$$

3. **Intensidades y caídas de tensión en cada resistencia**:

$$\begin{aligned}
I_{R1} &= I_1 = 1{,}25\,\text{A} && \implies V_{R1} = 1{,}25 \cdot 10 = 12{,}5\,\text{V}\\
I_{R2} &= I_2 - I_1 = 1{,}75 - 1{,}25 = 0{,}50\,\text{A} && \implies V_{R2} = 0{,}50 \cdot 3 = 1{,}5\,\text{V}\\
I_{R3} &= I_3 - I_1 = 6{,}75 - 1{,}25 = 5{,}50\,\text{A} && \implies V_{R3} = 5{,}50 \cdot 2 = 11{,}0\,\text{V}\\
I_{R4} &= I_2 = 1{,}75\,\text{A} && \implies V_{R4} = 1{,}75 \cdot 6 = 10{,}5\,\text{V}\\
I_{R5} &= I_3 = 6{,}75\,\text{A} && \implies V_{R5} = 6{,}75 \cdot 4 = 27{,}0\,\text{V}
\end{aligned}$$

4. **Tensiones absolutas en todos los nudos respecto a tierra (0 V)**:

$$V_D = -10{,}5\,\text{V}, \quad V_A = 89{,}5\,\text{V}, \quad V_B = 88{,}0\,\text{V}, \quad V_E = 27{,}0\,\text{V}, \quad V_C = 77{,}0\,\text{V}$$

5. **Balance completo de potencias**:

   - **Potencia disipada en las resistencias**:

   $$P_{R1} = 12{,}5 \cdot 1{,}25 = 15{,}625\,\text{W}, \quad P_{R2} = 1{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}75\,\text{W}, \quad P_{R3} = 11 \cdot 5{,}5 = 60{,}5\,\text{W}$$
   $$P_{R4} = 10{,}5 \cdot 1{,}75 = 18{,}375\,\text{W}, \quad P_{R5} = 27 \cdot 6{,}75 = 182{,}25\,\text{W} \implies \boxed{P_{R,\text{total}} = 277{,}5\,\text{W}}$$

   - **Potencia suministrada por las fuentes**:

   $$P_{V1} = 100\,\text{V} \cdot I_2 = 100 \cdot 1{,}75 = 175\,\text{W} \quad \text{(cede)}$$
   $$P_{V2} = -50\,\text{V} \cdot I_3 = -50 \cdot 6{,}75 = -337{,}5\,\text{W} \quad \text{(absorbe, pues } I_3 \text{ entra por el } +\text{)}$$
   $$P_{I1} = V_B \cdot 5\,\text{A} = 88\,\text{V} \cdot 5\,\text{A} = 440\,\text{W} \quad \text{(cede)}$$
   $$\implies \boxed{P_{F,\text{total}} = 175 - 337{,}5 + 440 = 277{,}5\,\text{W}} \quad \text{(Se cumple } P_{F,\text{total}} = P_{R,\text{total}}\text{)}$$

Tema 3

Fundamentos de Teoría de Circuitos: Corriente Alterna (AC)

3.1 Señales Alternas Sinusoidales y Representación Fasorial

En este tema estudiamos la resolución de circuitos excitados por fuentes de señal variable en el tiempo en **régimen permanente sinusoidal**. Las señales más empleadas en electrotecnia, electrónica y telecomunicaciones son las ondas periódicas senoidales (seno o coseno de periodo 2π radianes).

3.1.1 Caracterización de una Señal Periódica Senoidal

Una magnitud eléctrica alterna sinusoidal (tensión o intensidad) se expresa en función del tiempo como:

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi) \tag{3.1}$$

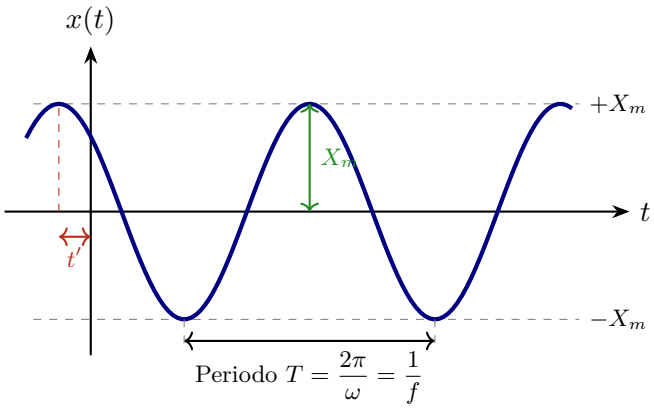


Figura 3.1: Representación temporal de una onda periódica cosenoidal $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$ adelantada un tiempo t'.

Sus parámetros característicos fundamentales son:

- **Amplitud o valor máximo (X_m)**: Valor de pico que alcanza la señal. El valor pico a pico es $X_{pp} = 2X_m$.
- **Periodo (T)**: Tiempo que tarda la señal en repetirse íntegramente (s).
- **Frecuencia lineal (f)**: Número de ciclos completos por segundo:

$$f = \frac{1}{T} \qquad [\text{SI: Hercio, Hz} = \text{s}^{-1}] \tag{3.2}$$

- **Frecuencia angular o pulsación (ω)**: Velocidad de variación angular en radianes por segundo:

$$\omega T = 2\pi \implies \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad [\text{rad/s}] \tag{3.3}$$

- **Fase inicial en el origen (ϕ)**: Representa la fracción del periodo en la cual la señal está desplazada (adelantada si $\phi > 0$ o retrasada si $\phi < 0$) respecto al origen de tiempos $t = 0$. Si el primer máximo ocurre un tiempo t' antes del origen ($t = -t'$), se verifica:

$$\phi = \omega t' \implies \frac{t'}{T} = \frac{\phi}{2\pi} \tag{3.4}$$

- **Valor eficaz o RMS (X_{ef} o X_{rms})**: Es el valor de una corriente continua que disiparía la misma potencia media sobre una resistencia pura. Para una señal sinusoidal pura:

$$X_{\text{ef}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)\,dt} = \frac{X_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,X_m \tag{3.5}$$

Importante / Ojo Examen: Identidades trigonométricas para unificar senos y cosenos

Para operar con fasores en un mismo circuito, **todas las fuentes deben estar expresadas con la misma función trigonométrica** (habitualmente coseno). Recuerda las relaciones de conversión:

$$\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha - 90^\circ), \qquad -\sin(\alpha) = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\alpha + 90^\circ) \tag{3.6}$$

3.1.2 Repaso de Números Complejos para Circuitos AC

A la hora de trabajar en corriente alterna no operamos resolviendo ecuaciones diferenciales con funciones senoidales en el tiempo, sino con sus **fasores** asociados, que son números complejos $\mathbf{Z}$ con parte real a y parte imaginaria b (en electrotecnia se emplea la letra $j = \sqrt{-1}$, con $j^2 = -1$, para no confundirla con la intensidad i).

1. Las 4 Formas de Expresar un Número Complejo

$$\mathbf{Z} = \underbrace{a + jb}_{\text{Binomial}} = \underbrace{(a,\, b)}_{\text{Cartesiana}} = \underbrace{r\,e^{j\varphi}}_{\text{Exponencial (Euler)}} = \underbrace{r\angle\varphi}_{\text{Polar (Módulo y Fase)}} \tag{3.7}$$

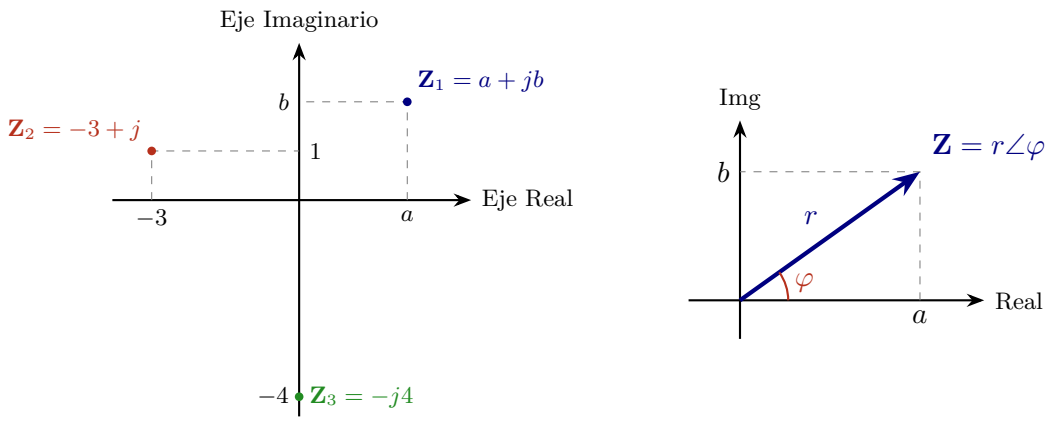


Figura 3.2: Representación en el plano complejo de Argand (izquierda) y relación polar-binomial (derecha).

Ley / Teorema: Conversión entre Forma Binomial y Forma Polar

- **Paso de Binomial $(a+jb)$ a Polar $(r\angle\varphi)$:**

$$\text{Módulo: } r=|\mathbf{Z}|=\sqrt{a^2+b^2}, \qquad \text{Fase: } \varphi=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{b}{a}\right) & \text{si } a>0\\ \arctan\left(\dfrac{b}{a}\right)+\pi \text{ (o } +180^\circ) & \text{si } a<0\end{cases} \tag{3.8}$$

- **Paso de Polar $(r\angle\varphi)$ a Binomial $(a+jb)$:**

$$a=r\cos\varphi, \qquad b=r\sin\varphi \implies \mathbf{Z}=r\cos\varphi+j\,r\sin\varphi \tag{3.9}$$

Ejemplo Explicado: Paso de binomial a polar en el segundo cuadrante ($a<0$)

Dado el número complejo $\mathbf{Z}=-3+4j$, halla su expresión en forma polar:

- **Módulo**: $r=|\mathbf{Z}|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$.
- **Fase**: Como la parte real es negativa ($a=-3<0$, segundo cuadrante), debemos sumar π rad (180°) al resultado de la calculadora:

$$\varphi=\arctan\left(\frac{4}{-3}\right)+180^\circ=-53{,}13^\circ+180^\circ=126{,}87^\circ \implies \boxed{\mathbf{Z}=5\angle 126{,}87^\circ}$$

2. Conjugado y Operaciones con Números Complejos

- **Complejo conjugado ($\mathbf{Z}^*$)**: Es el mismo número complejo pero con la parte imaginaria (o el ángulo de fase) cambiada de signo: si $\mathbf{Z}=a+jb=r\angle\varphi$, entonces $\mathbf{Z}^*=a-jb=r\angle-\varphi$. Se cumple siempre que el producto de un complejo por su conjugado es un número real puro igual al cuadrado de su módulo:

$$\mathbf{Z}\cdot\mathbf{Z}^*=(a+jb)(a-jb)=a^2-j^2b^2=a^2+b^2=|\mathbf{Z}|^2 \tag{3.10}$$

- **Suma y resta** (más sencillas en **forma binomial**):

$$\mathbf{Z}_1\pm\mathbf{Z}_2=(a+jb)\pm(c+jd)=(a\pm c)+j(b\pm d) \tag{3.11}$$

- **Multiplicación** (más sencilla en **forma polar o exponencial**):

$$\mathbf{Z}_1\cdot\mathbf{Z}_2=(r_1\angle\varphi_1)\cdot(r_2\angle\varphi_2)=(r_1r_2)\angle(\varphi_1+\varphi_2)=r_1r_2\,e^{j(\varphi_1+\varphi_2)} \tag{3.12}$$

  En forma binomial: $(a+jb)(c+jd)=(ac-bd)+j(ad+bc)$.

- **División** (en forma polar se dividen módulos y se restan fases; en forma binomial se multiplica numerador y denominador por el **conjugado del denominador**):

$$\frac{\mathbf{Z}_1}{\mathbf{Z}_2}=\frac{r_1\angle\varphi_1}{r_2\angle\varphi_2}=\frac{r_1}{r_2}\angle(\varphi_1-\varphi_2)=\frac{(a+jb)(c-jd)}{c^2+d^2}=\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\right)+j\left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right) \tag{3.13}$$

3.1.3 El Fasor, la Impedancia Compleja (Z) y la Admitancia (Y)

Un **fasor** es el número complejo cuyo módulo es la amplitud (V_m o I_m) y cuyo argumento es la fase en el origen (ϕ) de una señal alterna sinusoidal de pulsación ω:

$$v(t)=V_m\cos(\omega t+\phi) \quad\longleftrightarrow\quad \mathbf{V}=V_m\angle\phi=V_m\,e^{j\phi}=V_m\cos\phi+j\,V_m\sin\phi \tag{3.14}$$

Definición: Impedancia (Z) y Admitancia (Y)

- La **impedancia compleja Z** de un elemento pasivo es el cociente entre el fasor de tensión **V** en sus extremos y el fasor de intensidad **I** que lo atraviesa (Ley de Ohm generalizada en CA):

$$\boxed{\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R + jX = |\mathbf{Z}|\angle\theta} \qquad [\Omega] \tag{3.15}$$

  donde $R = \mathrm{Re}(\mathbf{Z})$ es la **parte resistiva** (resistencia) y $X = \mathrm{Im}(\mathbf{Z})$ es la **parte reactiva** (reactancia).

- La **admitancia compleja Y** es la inversa de la impedancia:

$$\boxed{\mathbf{Y} = \frac{1}{\mathbf{Z}} = \frac{\mathbf{I}}{\mathbf{V}} = G + jB} \qquad [\text{Siemens, S} = \Omega^{-1}] \tag{3.16}$$

3.1.4 Relación Tensión-Intensidad en los Elementos Pasivos en CA

1. **Resistencia ideal (R)**:

$$\mathbf{Z}_R = R = R\angle 0^\circ, \qquad \mathbf{Y}_R = \frac{1}{R} \tag{3.17}$$

   Si $\mathbf{I}_R = I_m\angle\phi$, entonces $\mathbf{V}_R = \mathbf{I}_R\mathbf{Z}_R = (I_m R)\angle(\phi + 0^\circ)$. En una resistencia, **la tensión y la intensidad tienen exactamente la misma fase** (están en fase): si $i_R(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$, entonces $v_R(t) = I_m R\cos(\omega t + \phi)$.

2. **Condensador ideal (C)**:

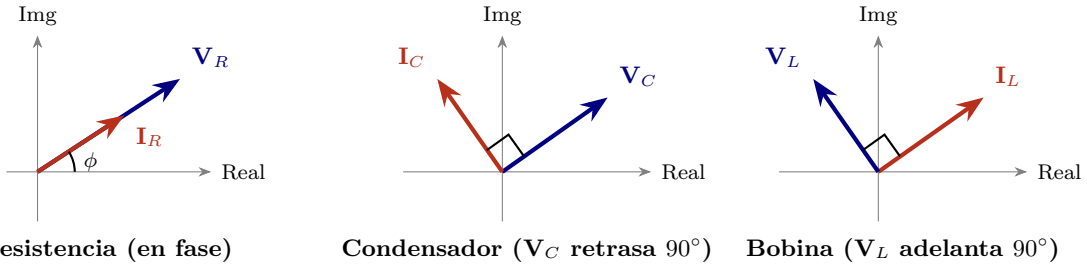
$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle -90^\circ, \qquad \mathbf{Y}_C = j\omega C \tag{3.18}$$

   Si $\mathbf{I}_C = I_m\angle\phi$, entonces $\mathbf{V}_C = \mathbf{I}_C\mathbf{Z}_C = \frac{I_m}{\omega C}\angle(\phi - 90^\circ)$. En un condensador, **la tensión va retrasada** 90° **($\pi/2$ rad) respecto a la intensidad** (o equivalentemente, la intensidad adelanta $\pi/2$ rad a la tensión): si $v_C(t) = V_m\cos(\omega t + \phi)$, entonces $i_C(t) = V_m C\omega\cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$.

3. **Bobina o inductor ideal (L)**:

$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = \omega L\angle +90^\circ, \qquad \mathbf{Y}_L = \frac{1}{j\omega L} = \frac{-j}{\omega L} \tag{3.19}$$

   Si $\mathbf{I}_L = I_m\angle\phi$, entonces $\mathbf{V}_L = \mathbf{I}_L\mathbf{Z}_L = (\omega L I_m)\angle(\phi + 90^\circ)$. En una bobina, **la tensión va adelantada** 90° **($\pi/2$ rad) respecto a la intensidad**: si $i_L(t) = I_m\cos(\omega t + \phi)$, entonces $v_L(t) = I_m\omega L\cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$.



Resistencia (en fase) **Condensador ($\mathbf{V}_C$ retrasa 90°)** **Bobina ($\mathbf{V}_L$ adelanta 90°)**

Figura 3.3: Diagramas fasoriales de tensión e intensidad en una resistencia, un condensador y una bobina.

3.1.5 Análisis Completo del Circuito RC Serie en CA

Al trabajar con impedancias complejas es como si todos los elementos fueran resistivos y cumplen la Ley de Ohm y todas las reglas de asociación serie/paralelo, divisores, Kirchhoff, Mallas, Nudos, Superposición, Thévenin y Norton. Analicemos en detalle el circuito RC serie excitado por $v_s(t) = |\mathbf{V}_s|\cos(\omega t + \phi)$ ($\mathbf{V}_s = |\mathbf{V}_s|\angle\phi$):

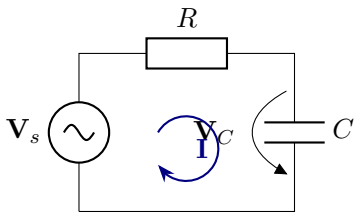


Figura 3.4: Circuito RC en serie excitado por una fuente alterna sinusoidal $\mathbf{V}_s = |\mathbf{V}_s|\angle\phi$.

1. **Ecuación de malla e intensidad fasorial**: Con $\mathbf{Z}_R = R$ y $\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$:

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{I}(\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_C) = \mathbf{I}\left(R + \frac{1}{j\omega C}\right) = \mathbf{I}\left(\frac{1 + j\omega CR}{j\omega C}\right) \implies \mathbf{I} = \frac{j\omega C}{1 + j\omega CR}\,\mathbf{V}_s \quad (3.20)$$

2. **Caída de tensión en el condensador ($\mathbf{V}_C$)**:

$$\mathbf{V}_C = \mathbf{I}\cdot\mathbf{Z}_C = \frac{j\omega C\,\mathbf{V}_s}{1 + j\omega CR}\cdot\frac{1}{j\omega C} = \frac{1}{1 + j\omega CR}\,\mathbf{V}_s \quad (3.21)$$

   Racionalizando (multiplicando arriba y abajo por el conjugado $1 - j\omega CR$):

$$\mathbf{V}_C = \frac{\mathbf{V}_s(1 - j\omega CR)}{(1 + j\omega CR)(1 - j\omega CR)} = \frac{\mathbf{V}_s}{1 + (\omega CR)^2}\,(1 - j\omega CR) \quad (3.22)$$

3. **Módulo, fase y expresión en el dominio del tiempo**:

$$|\mathbf{V}_C| = \frac{|\mathbf{V}_s|}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}, \qquad \varphi_C = \phi - \arctan(\omega CR) \implies \mathbf{V}_C = \frac{|\mathbf{V}_s|}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}\angle(\phi - \arctan(\omega CR)) \quad (3.23)$$

   Pasando al dominio del tiempo:

$$\boxed{v_C(t) = \frac{|\mathbf{V}_s|}{\sqrt{1 + (\omega CR)^2}}\cos\left[\omega t + \phi - \arctan(\omega CR)\right]} \quad (3.24)$$

3.2 Función de Transferencia, Diagramas de Bode y Filtros Pasivos

3.2.1 Función de Transferencia $\mathrm{T}(\omega)$ y Frecuencia de Corte ω_0

Definición: Función de Transferencia y Frecuencia de Corte

- La **función de transferencia** $\mathbf{T}(\omega)$ (o $\mathbf{H}(j\omega)$) es la relación entre el fasor de tensión de salida $\mathbf{V}_o(\omega)$ y el fasor de tensión de entrada $\mathbf{V}_i(\omega)$ en función de la frecuencia angular ω:

$$\boxed{\mathbf{T}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)} = |\mathbf{T}(\omega)|\,\angle\mathrm{Fase}\{\mathbf{T}(\omega)\}} \quad (3.25)$$

- La **frecuencia de corte** ω_0 (o ω_c) es aquella frecuencia angular para la cual el módulo de la función de transferencia cae a $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707$ de su valor máximo (lo que equivale a una caída de $-3\,\text{dB}$ en amplitud o a la mitad de la potencia):

$$|\mathbf{T}(\omega_0)| = \frac{|\mathbf{T}|_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,|\mathbf{T}|_{\text{máx}} \qquad \left(\text{En un filtro RC: } \boxed{\omega_0 = \frac{1}{RC}}, \quad \text{En un filtro RL: } \boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}}\right) \tag{3.26}$$

3.2.2 Diagramas de Bode de Amplitud y de Fase

El **Diagrama de Bode** sirve para analizar y representar gráficamente el comportamiento en frecuencia de un circuito mediante dos gráficas frente a $\log_{10}(\omega)$ (o poniendo el eje ω en escala logarítmica, donde cada **década** multiplica la frecuencia por 10, p. ej. de 100 Hz a 1000 Hz):

1. **Diagrama de Bode de amplitud**: Representa la ganancia en **decibelios (**dB**)**, definida como:

$$|\mathbf{T}(\omega)|_{\text{dB}} = 20\log_{10}|\mathbf{T}(\omega)| \qquad [\text{dB}] \tag{3.27}$$

2. **Diagrama de Bode de fase**: Representa el desfase $\text{Fase}\{\mathbf{T}(\omega)\}$ (en radianes o grados) frente a $\log_{10}(\omega)$.

3.2.3 Filtro RC Paso Bajo (Salida en el Condensador: $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_C$)

Tomando como salida la tensión en el condensador ($\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_C$) y como entrada la fuente ($\mathbf{V}_i = \mathbf{V}_s$), con $\omega_0 = \frac{1}{RC}$:

$$\mathbf{T}(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}\angle(-\arctan(\omega RC)) = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega/\omega_0)^2}}\angle\left(-\arctan\frac{\omega}{\omega_0}\right) \tag{3.28}$$

- **Para frecuencias bajas** ($\omega \ll \omega_0$): $|\mathbf{T}(\omega)| \approx 1 \implies 20\log_{10}(1) = 0\,\text{dB}$, y $\text{Fase}\{\mathbf{T}(\omega)\} \approx -\arctan(0) = 0\,\text{rad}$. Por tanto, para frecuencias bajas la señal de salida $v_o(t)$ y la de entrada $v_i(t)$ tienen **la misma amplitud y la misma fase** (pasan sin atenuación).

- **En la frecuencia de corte** ($\omega = \omega_0 = \frac{1}{RC}$): $|\mathbf{T}(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \implies 20\log_{10}(1/\sqrt{2}) = -3\,\text{dB}$, y $\text{Fase}\{\mathbf{T}(\omega_0)\} = -\arctan(1) = -\frac{\pi}{4}\,\text{rad} = -45°$.

- **Para frecuencias altas** ($\omega \gg \omega_0$): $|\mathbf{T}(\omega)| \approx \frac{\omega_0}{\omega} \implies 20\log_{10}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)$, que cae con una pendiente asintótica de $-20\,\text{dB}/\textbf{década}$, y $\text{Fase}\{\mathbf{T}(\omega)\} \approx -\arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2}\,\text{rad} = -90°$. A altas frecuencias la amplitud de salida es mucho menor que la de entrada y va retrasada $\pi/2$.

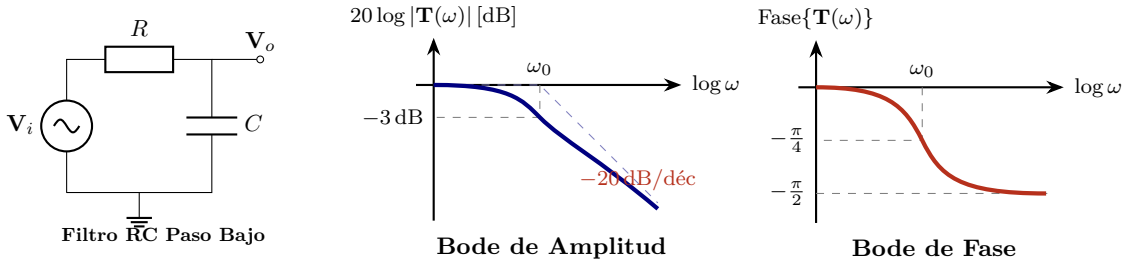


Figura 3.5: Esquema y diagramas de Bode de amplitud y fase del filtro RC paso bajo ($\omega_0 = 1/(RC)$).

3.2.4 Filtro RC Paso Alto (Salida en la Resistencia: $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_R$)

Intercambiando la posición del condensador y la resistencia (tomando $\mathbf{V}_o = \mathbf{V}_R$):

$$\mathbf{T}(\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \angle \left(\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega RC) \right) \tag{3.29}$$

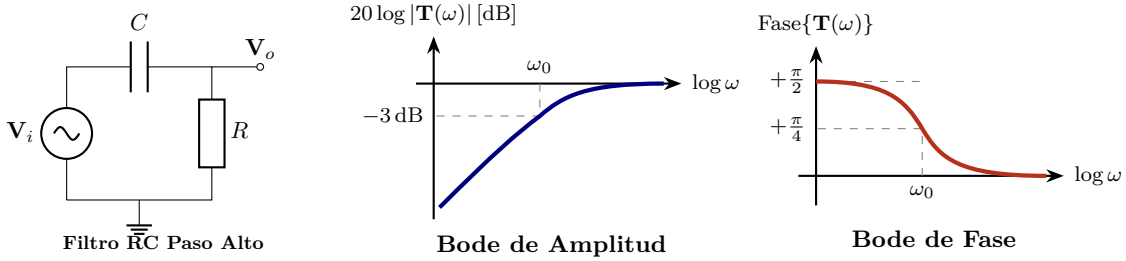


Figura 3.6: Esquema y diagramas de Bode de amplitud y fase del filtro RC paso alto ($\omega_0 = 1/(RC)$).

Tipo de Filtro	Salida $\mathbf{V}_o$	Función $\mathbf{T}(\omega)$	Frec. corte ω_0	Límites ($\omega \to 0$ / $\omega \to \infty$)
RC Paso Bajo	En C	$\frac{1}{1 + j\omega RC}$	$\frac{1}{RC}$	$\lvert\mathbf{T}(0)\rvert = 1$, $\lvert\mathbf{T}(\infty)\rvert = 0$
RC Paso Alto	En R	$\frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC}$	$\frac{1}{RC}$	$\lvert\mathbf{T}(0)\rvert = 0$, $\lvert\mathbf{T}(\infty)\rvert = 1$
RL Paso Bajo	En R	$\frac{R}{R + j\omega L}$	$\frac{R}{L}$	$\lvert\mathbf{T}(0)\rvert = 1$, $\lvert\mathbf{T}(\infty)\rvert = 0$
RL Paso Alto	En L	$\frac{j\omega L}{R + j\omega L}$	$\frac{R}{L}$	$\lvert\mathbf{T}(0)\rvert = 0$, $\lvert\mathbf{T}(\infty)\rvert = 1$

Tabla 3.1: Cuadro comparativo de los cuatro filtros pasivos de primer orden.

3.3 Potencia en Corriente Alterna

Importante / Ojo Examen: Regla Fundamental para la Potencia en CA

Para calcular la potencia instantánea en corriente alterna **debemos usar siempre las expresiones de tensión e intensidad en el dominio del tiempo**:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \tag{3.30}$$

No se pueden multiplicar directamente los fasores $\mathbf{V}\cdot\mathbf{I}$ sin conjugar, ya que el producto directo de dos fasores no coincide con el fasor ni con el valor medio de la potencia.

3.3.1 Potencia Instantánea, Potencia Activa (Media) y Potencia Reactiva

Sean la tensión y la intensidad en un dipolo:

$$v(t) = V_m\cos(\omega t+\theta_v), \qquad i(t) = I_m\cos(\omega t+\theta_i) \tag{3.31}$$

Aplicando la identidad trigonométrica del producto de cosenos $\cos A\cdot\cos B = \frac{1}{2}\big[\cos(A+B)+\cos(A-B)\big]$, la **potencia instantánea** resulta:

$$\boxed{p(t) = V_m\cos(\omega t+\theta_v)\cdot I_m\cos(\omega t+\theta_i) = \frac{V_m I_m}{2}\Big[\underbrace{\cos(2\omega t+\theta_v+\theta_i)}_{\substack{\text{Potencia reactiva}\\ \text{o fluctuante (media nula)}}} + \underbrace{\cos(\theta_v-\theta_i)}_{\substack{\text{Potencia activa}\\ \text{(constante)}}}\Big]} \tag{3.32}$$

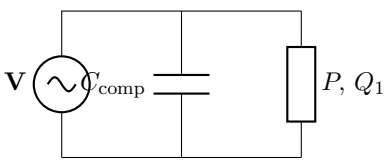
Al promediar a lo largo de un periodo completo T, el término cosenoidal de frecuencia doble 2ω tiene media nula, por lo que la **potencia media o potencia activa** es:

$$\boxed{P_{\text{media}} = P = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v-\theta_i) = V_{\text{ef}}\,I_{\text{ef}}\cos\varphi} \qquad \text{[Vatio, W]} \tag{3.33}$$

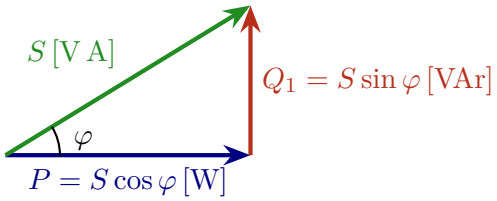
donde $\varphi = \theta_v-\theta_i$ es el ángulo de desfase entre tensión e intensidad y $\text{fp} = \cos\varphi$ es el **factor de potencia**.

- **En una resistencia pura** ($\theta_v=\theta_i \implies \varphi = 0°$): $\cos(0°)=1 \implies P_R = \frac{V_m I_m}{2} = \frac{1}{2}I_m^2 R > 0$.
- **En una bobina o condensador ideal** ($\theta_v-\theta_i = \pm 90° = \pm\frac{\pi}{2}$): $\cos(\pm\pi/2)=0 \implies$ $\boxed{P_{L,\text{media}} = P_{C,\text{media}} = 0\,\text{W}}$. Los elementos reactivos puros no disipan potencia media: la absorben durante un cuarto de ciclo y la devuelven íntegramente en el siguiente.

En ingeniería eléctrica se definen además la **potencia reactiva** $Q = \frac{V_m I_m}{2}\sin(\theta_v-\theta_i) = V_{\text{ef}}I_{\text{ef}}\sin\varphi$ [VAr] y la **potencia aparente** $S = \frac{V_m I_m}{2} = V_{\text{ef}}I_{\text{ef}} = \sqrt{P^2+Q^2}$ [V A], que forman el **triángulo de potencias**:



Compensación con C en paralelo



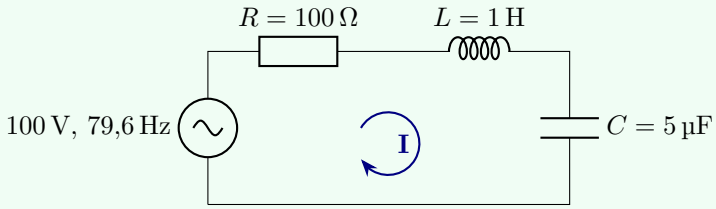
Triángulo de Potencias ($S^2 = P^2+Q^2$)

Figura 3.7: Compensación del factor de potencia en una carga inductiva y triángulo de potencias.

3.4 Ejemplos y Ejercicios de Clase Resueltos Paso a Paso

Ejemplo Explicado: Análisis completo de un circuito RLC serie (pág. 65)

En el circuito RLC en serie de la figura, la fuente de tensión alterna tiene una amplitud de 100 V, frecuencia $f = 79{,}6\,\text{Hz}$ y fase inicial nula, siendo $R = 100\,\Omega$, $L = 1\,\text{H}$ y $C = 5\,\mu\text{F}$. Calcula las expresiones temporales de la intensidad $i(t)$ y de las caídas de tensión en cada elemento: $v_R(t)$, $v_L(t)$ y $v_C(t)$.



Resolución paso a paso:

1. **Cálculo de la pulsación ω y expresión temporal de la fuente:**

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 79{,}6\,\text{Hz} = 500\,\text{rad/s} \implies v(t) = 100\cos(500t + 0)\,\text{V}$$

2. **Impedancias de cada elemento y su equivalente serie en forma binomial y polar:**

$$\mathbf{Z}_R = 100\,\Omega = 100\angle 0^\circ\,\Omega$$
$$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{500 \cdot 5 \times 10^{-6}} = -j400\,\Omega = 400\angle -90^\circ\,\Omega$$
$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j\,500 \cdot 1 = j500\,\Omega = 500\angle 90^\circ\,\Omega$$
$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C = 100 + j500 - j400 = (100 + j100)\,\Omega$$

Pasando $\mathbf{Z}_{eq}$ a forma polar:

$$|\mathbf{Z}_{eq}| = \sqrt{100^2 + 100^2} = 141{,}4\,\Omega, \quad \text{fase} = \arctan\left(\frac{100}{100}\right) = 45^\circ \implies \mathbf{Z}_{eq} = 141{,}4\angle 45^\circ\,\Omega$$

3. **Fasor de la fuente e intensidad de la malla:**

$$\mathbf{V} = 100\angle 0^\circ\,\text{V} \implies \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{100\angle 0^\circ}{141{,}4\angle 45^\circ} = 0{,}707\angle -45^\circ\,\text{A} \implies \boxed{i(t) = 0{,}707\cos\left(500t - \frac{\pi}{4}\right)\,\text{A}}$$

4. **Caídas de tensión en cada elemento (en fasor y en el dominio del tiempo):**

- **Resistencia:** $\mathbf{V}_R = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}_R = (0{,}707\angle -45^\circ) \cdot (100\angle 0^\circ) = 70{,}7\angle -45^\circ\,\text{V}$

$$\boxed{v_R(t) = 70{,}7\cos\left(500t - \frac{\pi}{4}\right)\,\text{V}}$$

- **Bobina:** $\mathbf{V}_L = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}_L = (0{,}707\angle -45^\circ) \cdot (500\angle 90^\circ) = 353{,}5\angle 45^\circ\,\text{V}$

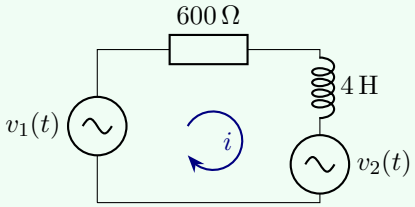
$$\boxed{v_L(t) = 353{,}5\cos\left(500t + \frac{\pi}{4}\right)\,\text{V}}$$

- **Condensador:** $\mathbf{V}_C = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}_C = (0{,}707\angle -45^\circ) \cdot (400\angle -90^\circ) = 282{,}8\angle -135^\circ\,\text{V}$

$$\boxed{v_C(t) = 282{,}8\cos\left(500t - \frac{3\pi}{4}\right)\,\text{V}}$$

Ejemplo Explicado: Cálculo de potencias instantáneas y medias con dos fuentes (pág. 66)

En el circuito de la figura se tienen dos fuentes $v_1(t) = 8\cos(\omega t)\,\text{V}$ y $v_2(t) = 6\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\,\text{V}$ con $\omega = 200\,\text{rad/s}$, una resistencia $R = 600\,\Omega$ y una bobina $L = 4\,\text{H}$. Calcula la corriente $i(t)$ y las potencias instantáneas y medias en ambas fuentes y en la resistencia.



Resolución paso a paso:

1. **Impedancias y fasores de las fuentes:**

$$\mathbf{Z}_R = 600\,\Omega, \qquad \mathbf{Z}_L = j\omega L = j\,200\cdot 4 = j800\,\Omega$$
$$\mathbf{V}_1 = 8\angle 0^\circ = 8 + j0\,\text{V}, \qquad \mathbf{V}_2 = 6\angle 90^\circ = j6\,\text{V}$$

2. **Ecuación de malla por LTK:**

$$\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}(\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L) \implies 8 - j6 = \mathbf{I}(600 + j800) \implies \mathbf{I} = \frac{8 - j6}{600 + j800} = -j0{,}01 = 0{,}01\angle -90^\circ\,\text{A}$$

Pasando al dominio del tiempo:

$$\boxed{i(t) = 0{,}01\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\,\text{A}}$$

3. **Cálculo de potencias instantáneas y medias:**

- **Fuente 1:**

$$p_{V1}(t) = v_1(t)\cdot i(t) = 8\cos(\omega t)\cdot 0{,}01\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{0{,}08}{2}\left[\cos\left(2\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]\,\text{W}$$

$$\boxed{P_{V1,\text{media}} = 0{,}04\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0\,\text{W}}$$

- **Fuente 2** (la corriente $i(t)$ entra por el terminal positivo de v_2, luego lleva signo menos):

$$p_{V2}(t) = -v_2(t)\cdot i(t) = -6\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\cdot 0{,}01\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{0{,}06}{2}\left[\cos(2\omega t) + \cos(\pi)\right]\,\text{W}$$

Como $\cos(\pi) = -1$:

$$\boxed{P_{V2,\text{media}} = -0{,}03\cdot(-1) = +0{,}03\,\text{W}} \quad \text{(suministra } 30\,\text{mW)}$$

- **Resistencia** ($v_R(t) = R\cdot i(t) = 6\cos(\omega t - \pi/2)\,\text{V}$):

$$p_R(t) = v_R(t)\cdot i(t) = \frac{6\cdot 0{,}01}{2}\left[\cos(2\omega t - \pi) + \cos(0)\right]\,\text{W} \implies \boxed{P_{R,\text{media}} = 0{,}03\,\text{W}}$$

Ejercicio Resuelto: Ejercicios cortos de fasores e identificación de elementos (Ejercicios 4, 8, 9 y 10)

1. **Ejercicio 4**: *¿Cuál es el valor máximo y el periodo de la onda* $v(t) = 100\sin(377t)\,\text{V}$*?*

   - **Valor máximo (amplitud)**: $V_m = \boxed{100\,\text{V}}$ (valor cuando el seno vale 1).
   - **Periodo**: Como $\omega = 377\,\text{rad/s}$:

   $$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\,\text{rad}}{377\,\text{rad/s}} \approx 0{,}0167\,\text{s} = 16{,}7\,\text{ms}}$$

2. **Ejercicio 8**: *La corriente que atraviesa un condensador de* $C = 50\,\mu\text{F}$ *es* $i(t) = 2\sin(1000t)\,\text{A}$*. ¿Cuál es el valor del voltaje instantáneo* $v_C(t)$*?*

   - La frecuencia angular es $\omega = 1000\,\text{rad/s}$, por lo que la impedancia del condensador vale:

   $$\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{1000 \cdot 50 \times 10^{-6}} = -j20\,\Omega = 20\angle -90^\circ\,\Omega$$

   - Tomando el fasor de intensidad en base seno $\mathbf{I}_C = 2\angle 0^\circ\,\text{A}$, aplicamos la Ley de Ohm:

   $$\mathbf{V}_C = \mathbf{I}_C \cdot \mathbf{Z}_C = (2\angle 0^\circ)\cdot(20\angle -90^\circ) = 40\angle -90^\circ\,\text{V} \implies \boxed{v_C(t) = 40\sin\left(1000t - \frac{\pi}{2}\right)\,\text{V}}$$

3. **Ejercicio 9**: *La diferencia de potencial entre los extremos de un elemento pasivo es* $v(t) = 100\sin\left(377t + \frac{\pi}{9}\right)\,\text{V}$ *y su corriente es* $i(t) = 4\sin\left(377t - \frac{7\pi}{18}\right)\,\text{A}$*. ¿De qué elemento se trata y cuál es su valor?*

   - Los fasores son $\mathbf{V} = 100\angle(\pi/9)\,\text{V}$ e $\mathbf{I} = 4\angle(-7\pi/18)\,\text{A}$. Su impedancia es:

   $$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{100}{4}\angle\left(\frac{\pi}{9} - \left(-\frac{7\pi}{18}\right)\right) = 25\angle\left(\frac{9\pi}{18}\right) = 25\angle\frac{\pi}{2}\,\Omega = +j25\,\Omega$$

   - Como el desfase es $+\pi/2$ ($+90^\circ$, la intensidad va retrasada $\pi/2$ respecto a la tensión), **se trata de una bobina** de inductancia:

   $$\omega L = 25\,\Omega \implies \boxed{L = \frac{25\,\Omega}{377\,\text{rad/s}} = 0{,}0663\,\text{H} = 66{,}3\,\text{mH}}$$

4. **Ejercicio 10**: *La diferencia de potencial entre los extremos de un elemento es* $v(t) = 200\sin\left(314t - \frac{\pi}{18}\right)\,\text{V}$ *e* $i(t) = 20\sin\left(314t - \frac{\pi}{18}\right)\,\text{A}$*. ¿De qué elemento se trata y cuál es su valor?*

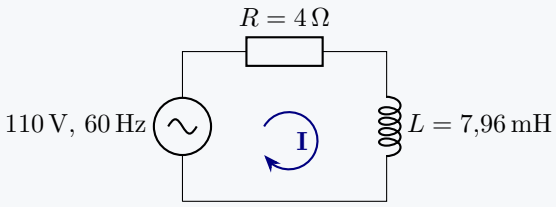
   - Calculamos la impedancia dividiendo los fasores $\mathbf{V} = 200\angle(-\pi/18)\,\text{V}$ e $\mathbf{I} = 20\angle(-\pi/18)\,\text{A}$:

   $$\mathbf{Z} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{200}{20}\angle\left(-\frac{\pi}{18} - \left(-\frac{\pi}{18}\right)\right) = 10\angle 0^\circ\,\Omega = 10\,\Omega$$

   - Como la tensión y la intensidad están exactamente en fase ($\varphi = 0^\circ$), **se trata de una resistencia pura** de valor $\boxed{R = 10\,\Omega}$.

Ejercicio Resuelto: Análisis de un circuito RL en serie (Ejercicio 13)

Una resistencia de $R = 4\,\Omega$ está conectada en serie con una bobina de $L = 7{,}96\,\text{mH}$ y una fuente de tensión alterna de $110\,\text{V}$ de amplitud y frecuencia $f = 60\,\text{Hz}$. Calcula la impedancia equivalente, la intensidad $i(t)$ y las tensiones $v_R(t)$ y $v_L(t)$.



Resolución paso a paso:

1. **Frecuencia angular y fasor de la fuente**:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi{\cdot}60\,\text{Hz} = 377\,\text{rad/s} \implies v_s(t) = 110\cos(377t)\,\text{V} \longleftrightarrow \mathbf{V}_s = 110\angle 0^\circ\,\text{V}$$

2. **Impedancias e impedancia equivalente serie**:

$$\mathbf{Z}_R = 4\angle 0^\circ\,\Omega, \qquad \mathbf{Z}_L = j\omega L = j(377)(7{,}96\times 10^{-3}) = j3\,\Omega = 3\angle 90^\circ\,\Omega$$

$$\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L = (4+j3)\,\Omega = \sqrt{4^2+3^2}\angle \arctan\left(\frac{3}{4}\right) = \boxed{5\angle 36{,}87^\circ\,\Omega}$$

3. **Intensidad del circuito**:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_{eq}} = \frac{110\angle 0^\circ}{5\angle 36{,}87^\circ} = 22\angle -36{,}87^\circ\,\text{A} \implies \boxed{i(t) = 22\cos\left(377t - \frac{36{,}87\pi}{180}\right)\,\text{A}}$$

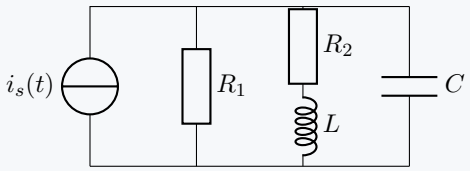
4. **Tensiones en la resistencia y en la bobina**:

$$\mathbf{V}_R = \mathbf{I}\cdot\mathbf{Z}_R = (22\angle -36{,}87^\circ)\cdot(4\angle 0^\circ) = 88\angle -36{,}87^\circ\,\text{V} \implies \boxed{v_R(t) = 88\cos\left(377t - \frac{36{,}87\pi}{180}\right)\,\text{V}}$$

$$\mathbf{V}_L = \mathbf{I}\cdot\mathbf{Z}_L = (22\angle -36{,}87^\circ)\cdot(3\angle 90^\circ) = 66\angle 53{,}13^\circ\,\text{V} \implies \boxed{v_L(t) = 66\cos\left(377t + \frac{53{,}13\pi}{180}\right)\,\text{V}}$$

Ejercicio Resuelto: Red serie-paralelo alimentada por fuente de corriente (Ejercicio 15)

En el circuito de la figura, la fuente de corriente proporciona una intensidad $i_s(t) = 8\cos(200\,000t)\,\text{A}$, siendo $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 6\,\Omega$, $L = 40\,\mu\text{H}$ y $C = 1\,\mu\text{F}$. Calcula la diferencia de potencial $v_{AB}(t)$ entre los extremos de la fuente y las intensidades que pasan por cada elemento.



Resolución paso a paso:

1. **Fasor de corriente e impedancias individuales** ($\omega = 2\times10^5\,\text{rad/s}$):

$$\mathbf{I}_s = 8\angle 0^\circ = (8+j0)\,\text{A}, \qquad \mathbf{Z}_{R1} = 10\,\Omega, \qquad \mathbf{Z}_{R2} = 6\,\Omega$$
$$\mathbf{Z}_L = j\omega L = j(2\times10^5)(40\times10^{-6}) = j8\,\Omega = 8\angle 90^\circ\,\Omega$$
$$\mathbf{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{-j}{2\times10^5\cdot10^{-6}} = -j5\,\Omega = 5\angle -90^\circ\,\Omega$$

2. **Asociación de impedancias**:

   - Rama central en serie: $\mathbf{Z}_s = \mathbf{Z}_{R2} + \mathbf{Z}_L = (6+j8)\,\Omega$.
   - Paralelo de R_1 con C:

$$\mathbf{Z}_{p1} = \mathbf{Z}_{R1} \parallel \mathbf{Z}_C = \frac{10\cdot(-j5)}{10-j5} = \frac{-j50(10+j5)}{100+25} = \frac{250-j500}{125} = (2-j4)\,\Omega$$

   - Impedancia total equivalente $\mathbf{Z}_{eq} = \mathbf{Z}_{p1} \parallel \mathbf{Z}_s$:

$$\mathbf{Z}_{eq} = \frac{(2-j4)(6+j8)}{(2-j4)+(6+j8)} = \frac{44-j8}{8+j4} = \frac{(11-j2)(2-j)}{4+1} = \frac{20-j15}{5} = \boxed{(4-j3)\,\Omega}$$

3. **Diferencia de potencial entre los extremos de la fuente ($\mathbf{V}_{AB}$)**:

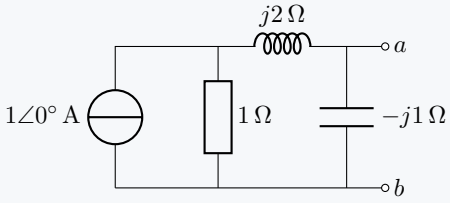
$$\mathbf{V}_{AB} = \mathbf{I}_s\cdot\mathbf{Z}_{eq} = 8\cdot(4-j3) = (32-j24)\,\text{V} = 40\angle -36{,}87^\circ\,\text{V} \implies \boxed{v_{AB}(t) = 40\cos\left(2\cdot10^5 t - \frac{36{,}87\pi}{180}\right)}$$

4. **Intensidades por cada una de las tres ramas en paralelo**:

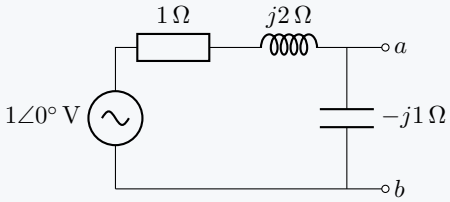
$$\mathbf{I}_{R1} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_{R1}} = \frac{32-j24}{10} = (3{,}2-j2{,}4)\,\text{A} = 4\angle -36{,}87^\circ\,\text{A} \implies \boxed{i_{R1}(t) = 4\cos\left(2\cdot10^5 t - \frac{36{,}87\pi}{180}\right)}$$
$$\mathbf{I}_{R2,L} = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_s} = \frac{32-j24}{6+j8} = -j4\,\text{A} = 4\angle -90^\circ\,\text{A} \implies \boxed{i_{R2}(t) = 4\cos\left(2\cdot10^5 t - \frac{\pi}{2}\right)\,\text{A}}$$
$$\mathbf{I}_C = \frac{\mathbf{V}_{AB}}{\mathbf{Z}_C} = \frac{32-j24}{-j5} = (4{,}8+j6{,}4)\,\text{A} = 8\angle 53{,}13^\circ\,\text{A} \implies \boxed{i_C(t) = 8\cos\left(2\cdot10^5 t + \frac{53{,}13\pi}{180}\right)\,\text{A}}$$

Ejercicio Resuelto: Equivalente de Thévenin y de Norton en Corriente Alterna (Ejercicios 18 y 19)

Calcula el circuito equivalente de Thévenin y de Norton entre los terminales a y b del siguiente circuito:



Circuito original



Tras transformar la fuente

Resolución paso a paso:

1. **Transformación de la fuente de corriente en paralelo con** $1\,\Omega$: La fuente

$\mathbf{I}_s = 1\angle 0°\,\text{A}$ en paralelo con $\mathbf{Z}_R = 1\,\Omega$ equivale a una fuente de tensión $\mathbf{V} = \mathbf{I}_s \cdot \mathbf{Z}_R = 1\angle 0°\,\text{V}$ en serie con $1\,\Omega$.

2. **Cálculo de la tensión de Thévenin ($\mathbf{V}_{th} = \mathbf{V}_{ab}$)**: En la única malla resultante, la corriente fasorial $\mathbf{I}$ y la caída en el condensador entre a y b son:

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L + \mathbf{Z}_C} = \frac{1}{1 + j2 - j1} = \frac{1}{1+j}\,\text{A}$$

$$\boxed{\mathbf{V}_{th} = \mathbf{V}_{ab} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{Z}_C = \frac{1}{1+j} \cdot (-j) = \frac{-j(1-j)}{1^2+1^2} = \frac{-1-j}{2}\,\text{V} = (-0{,}5 - j0{,}5)\,\text{V}}$$

3. **Cálculo de la impedancia de Thévenin ($\mathbf{Z}_{th}$)**: Anulando la fuente de corriente original (circuito abierto), entre a y b queda la rama serie $(1 + j2)\,\Omega$ en paralelo con el condensador $(-j1)\,\Omega$:

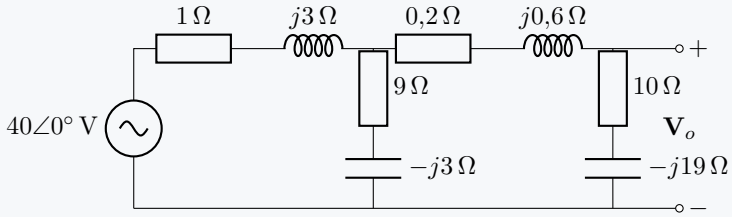
$$\boxed{\mathbf{Z}_{th} = (1 + j2) \parallel (-j1) = \frac{(1+j2)(-j)}{1 + j2 - j} = \frac{2-j}{1+j} = \frac{(2-j)(1-j)}{2} = \frac{1-j3}{2}\,\Omega = (0{,}5 - j1{,}5)\,\Omega}$$

4. **Cálculo de la corriente de Norton ($\mathbf{I}_N$) (Ejercicio 19)**:

$$\boxed{\mathbf{I}_N = \frac{\mathbf{V}_{th}}{\mathbf{Z}_{th}} = \frac{(-1-j)/2}{(1-j3)/2} = \frac{-1-j}{1-j3} = \frac{(-1-j)(1+j3)}{1^2+3^2} = \frac{2-j4}{10} = \left(\frac{1}{5} - j\frac{2}{5}\right)\,\text{A}}$$

Ejercicio Resuelto: Transformación sucesiva de fuentes en CA (Ejercicio 16)

Utiliza el concepto de transformación de fuentes y asociación de impedancias para calcular el fasor correspondiente al voltaje de salida $\mathbf{V}_o$ en el circuito de la figura:



Resolución paso a paso:

1. **Paso 1: Agrupamos cada una de las 4 ramas en serie**:

$$\mathbf{Z}_1 = (1 + j3)\,\Omega, \quad \mathbf{Z}_2 = (0{,}2 + j0{,}6)\,\Omega, \quad \mathbf{Z}_3 = (9 - j3)\,\Omega, \quad \mathbf{Z}_4 = (10 - j19)\,\Omega$$

2. **Paso 2: Transformamos la fuente de tensión $\mathbf{V}_s = 40\angle 0°\,\text{V}$ en serie con $\mathbf{Z}_1$ en fuente de corriente en paralelo**:

$$\mathbf{I}_{N1} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_1} = \frac{40}{1+j3} = \frac{40(1-j3)}{1+9} = (4 - j12)\,\text{A}$$

3. **Paso 3: Asociamos en paralelo $\mathbf{Z}_1 \parallel \mathbf{Z}_3$ y volvemos a transformar a fuente de tensión $\mathbf{V}_{th1}$**:

$$\mathbf{Z}_{p1} = \mathbf{Z}_1 \parallel \mathbf{Z}_3 = \frac{(1+j3)(9-j3)}{(1+j3)+(9-j3)} = \frac{18+j24}{10} = \frac{1}{5}(9+j12)\,\Omega = (1{,}8+j2{,}4)\,\Omega$$

$$\mathbf{V}_{th1} = \mathbf{I}_{N1} \cdot \mathbf{Z}_{p1} = (4 - j12) \cdot \frac{1}{5}(9 + j12) = (36 - j12)\,\text{V}$$

4. **Paso 4: Sumamos en serie $\mathbf{Z}_{s1} = \mathbf{Z}_{p1} + \mathbf{Z}_2$ y aplicamos divisor de tensión con $\mathbf{Z}_4$:**

$$\mathbf{Z}_{s1} = (1{,}8 + j2{,}4) + (0{,}2 + j0{,}6) = (2 + j3)\,\Omega$$

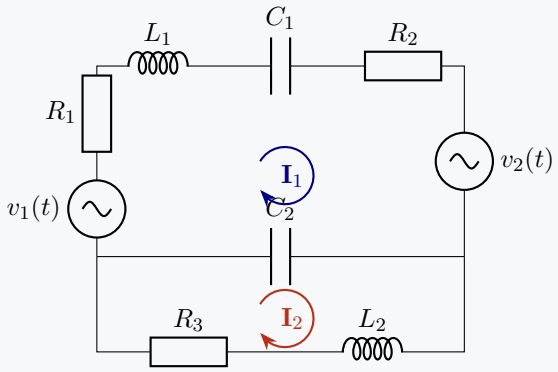
$$\mathbf{V}_o = \frac{\mathbf{Z}_4}{\mathbf{Z}_{s1} + \mathbf{Z}_4}\,\mathbf{V}_{th1} = \frac{10 - j19}{(2 + j3) + (10 - j19)} \cdot (36 - j12) = \frac{132 - j804}{12 - j16} = \frac{903 - j471}{25} = \boxed{(36{,}12 - j18}$$

Ejercicio Resuelto: Método de las Corrientes de Malla en Corriente Alterna (Ejercicio 20)

Utiliza el método de mallas para calcular la expresión temporal de la corriente que pasa por las bobinas L_1 y L_2 en el circuito de la figura, sabiendo que:

$$v_1(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \cos\left(10^4 t - \frac{\pi}{4}\right)\,\text{V}, \qquad v_2(t) = -\frac{4}{\sqrt{2}} \sin\left(10^4 t + \frac{\pi}{4}\right)\,\text{V}$$

$$R_1 = R_2 = 100\,\Omega, \quad R_3 = 800\,\Omega, \quad L_1 = 10\,\text{mH}, \quad L_2 = 40\,\text{mH}, \quad C_1 = 1\,\mu\text{F}, \quad C_2 = 0{,}25\,\mu\text{F}$$



Resolución paso a paso:

1. **Expresamos $v_2(t)$ en función del coseno:** Usando $-\sin(\alpha) = \cos(\alpha + \pi/2)$:

$$v_2(t) = \frac{4}{\sqrt{2}} \cos\left(10^4 t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{\sqrt{2}} \cos\left(10^4 t + \frac{3\pi}{4}\right)\,\text{V}$$

2. **Calculamos los fasores de las fuentes:**

$$\mathbf{V}_1 = \frac{4}{\sqrt{2}} \angle -45^\circ = (2 - j2)\,\text{V}, \qquad \mathbf{V}_2 = \frac{4}{\sqrt{2}} \angle 135^\circ = (-2 + j2)\,\text{V}$$

3. **Calculamos las impedancias de los elementos pasivos** ($\omega = 10^4\,\text{rad/s}$):

$$\mathbf{Z}_{R1} = \mathbf{Z}_{R2} = 100\,\Omega, \qquad \mathbf{Z}_{R3} = 800\,\Omega$$

$$\mathbf{Z}_{L1} = j\omega L_1 = j\,10^4 \cdot 10^{-2} = j100\,\Omega, \qquad \mathbf{Z}_{L2} = j\omega L_2 = j\,10^4 \cdot 4 \times 10^{-2} = j400\,\Omega$$

$$\mathbf{Z}_{C1} = \frac{-j}{10^4 \cdot 10^{-6}} = -j100\,\Omega, \qquad \mathbf{Z}_{C2} = \frac{-j}{10^4 \cdot 0{,}25 \times 10^{-6}} = -j400\,\Omega$$

4. **Planteamos y resolvemos las ecuaciones de malla:**

$$\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2 = \mathbf{I}_1(\mathbf{Z}_{R1} + \mathbf{Z}_{L1} + \mathbf{Z}_{C1} + \mathbf{Z}_{R2} + \mathbf{Z}_{C2}) - \mathbf{I}_2\mathbf{Z}_{C2}$$

$$0 = -\mathbf{I}_1\mathbf{Z}_{C2} + \mathbf{I}_2(\mathbf{Z}_{C2} + \mathbf{Z}_{R3} + \mathbf{Z}_{L2})$$

Sustituyendo los valores numéricos ($\mathbf{Z}_{L1}+\mathbf{Z}_{C1}=0$ y $\mathbf{Z}_{L2}+\mathbf{Z}_{C2}=0$, entran en resonancia):

$$(2-j2)-(-2+j2)=(200-j400)\mathbf{I}_1+j400\,\mathbf{I}_2 \implies 4-j4=(200-j400)\mathbf{I}_1+j400\,\mathbf{I}_2$$
$$0=j400\,\mathbf{I}_1+800\,\mathbf{I}_2 \implies \mathbf{I}_2=\frac{-j400}{800}\,\mathbf{I}_1=-\frac{j}{2}\,\mathbf{I}_1$$

Sustituyendo $\mathbf{I}_2$ en la primera ecuación:

$$4-j4=(200-j400)\mathbf{I}_1+j400\left(-\frac{j}{2}\,\mathbf{I}_1\right)=(400-j400)\mathbf{I}_1 \implies \boxed{\mathbf{I}_1=\mathbf{I}_{L1}=0{,}01\,\text{A}=0{,}01\angle 0^\circ\,\text{A}}$$

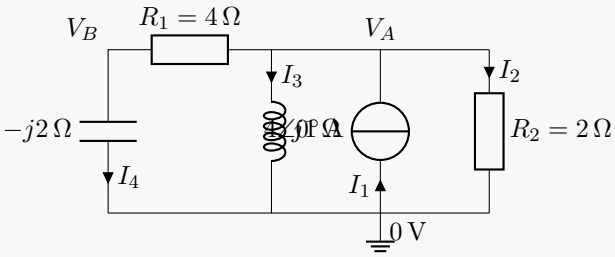
$$\boxed{\mathbf{I}_2=\mathbf{I}_{L2}=-\frac{j}{2}\cdot 0{,}01=-j\,5\times10^{-3}\,\text{A}=5\times10^{-3}\angle-90^\circ\,\text{A}}$$

5. **Expresiones temporales de las corrientes por las bobinas**:

$$\boxed{i_{L1}(t)=0{,}01\cos\left(10^4 t\right)\,\text{A}},\qquad \boxed{i_{L2}(t)=5\times10^{-3}\cos\left(10^4 t-\frac{\pi}{2}\right)\,\text{A}}$$

Ejercicio Resuelto: Análisis por Nudos y Balance Completo de Potencias en CA (Ejercicio 31)

Determina las ecuaciones temporales de las tensiones e intensidades de rama y las potencias instantáneas y medias en todos los elementos del siguiente circuito:



Resolución paso a paso:

1. **Resolución por el método de nudos**: Referenciando el nudo inferior a tierra (0 V), aplicamos LCK en el nudo principal superior V_A ($\mathbf{I}_1=\mathbf{I}_2+\mathbf{I}_3+\mathbf{I}_4$):

$$4=\frac{\mathbf{V}_A}{2}+\frac{\mathbf{V}_A}{j1}+\frac{\mathbf{V}_A}{4-j2}=\frac{\mathbf{V}_A}{2}-j\mathbf{V}_A+\frac{\mathbf{V}_A(4+j2)}{20}$$

Multiplicando toda la ecuación por 20:

$$80=10\mathbf{V}_A-j20\mathbf{V}_A+(4+j2)\mathbf{V}_A=(14-j18)\mathbf{V}_A \implies \mathbf{V}_A=\frac{80}{14-j18}=(2{,}154+j2{,}769)\,\text{V}=3{,}508\angle$$

Pasando a radianes ($52{,}12^\circ\approx 0{,}29\pi$ rad):

$$\boxed{v_A(t)=3{,}51\cos(\omega t+0{,}29\pi)\,\text{V}}$$

2. **Intensidades de cada rama y tensiones $\mathbf{V}_B$ y $\mathbf{V}_{R1}$:**

$$\mathbf{I}_1 = 4\angle 0^\circ\ \text{A} \qquad \Longrightarrow\ i_1(t) = 4\cos(\omega t)\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_2 = \frac{\mathbf{V}_A}{2\angle 0^\circ} = 1{,}754\angle 52{,}12^\circ\ \text{A} \qquad \Longrightarrow\ i_2(t) = 1{,}75\cos(\omega t + 0{,}29\pi)\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_3 = \frac{\mathbf{V}_A}{1\angle 90^\circ} = 3{,}51\angle -37{,}88^\circ\ \text{A} \qquad \Longrightarrow\ i_3(t) = 3{,}51\cos(\omega t - 0{,}21\pi)\ \text{A}$$
$$\mathbf{I}_4 = \frac{\mathbf{V}_A}{4 - j2} = \frac{3{,}508\angle 52{,}12^\circ}{4{,}472\angle -26{,}56^\circ} = 0{,}784\angle 78{,}68^\circ\ \text{A} \qquad \Longrightarrow\ i_4(t) = 0{,}78\cos(\omega t + 0{,}437\pi)\ \text{A}$$

$$\mathbf{V}_B = \mathbf{I}_4 \cdot \mathbf{Z}_C = (0{,}784\angle 78{,}68^\circ)(2\angle -90^\circ) = 1{,}57\angle -11{,}32^\circ\ \text{V} \Longrightarrow v_B(t) = 1{,}57\cos(\omega t - 0{,}063\pi)\ \text{V}$$
$$\mathbf{V}_{R1} = \mathbf{V}_A - \mathbf{V}_B = (0{,}61 + j3{,}08)\ \text{V} = 3{,}14\angle 78{,}68^\circ\ \text{V} \Longrightarrow v_{R1}(t) = 3{,}14\cos(\omega t + 0{,}437\pi)\ \text{V}$$

3. **Potencias medias y comprobación del balance energético:**

$$P_{\text{fuente,media}} = \frac{4 \cdot 3{,}51}{2}\cos(0{,}29\pi) = 7{,}02 \cdot 0{,}613 = \boxed{4{,}30\ \text{W}}$$
$$P_{R2,\text{media}} = \frac{1{,}754 \cdot 3{,}508}{2}\cos(0) = \boxed{3{,}08\ \text{W}}, \qquad P_{R1,\text{media}} = \frac{0{,}784 \cdot 3{,}14}{2}\cos(0) = \boxed{1{,}22\ \text{W}}$$
$$P_{L,\text{media}} = \frac{3{,}51 \cdot 3{,}51}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{0\ \text{W}}, \qquad P_{C,\text{media}} = \frac{0{,}784 \cdot 1{,}57}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{0\ \text{W}}$$

Se comprueba exactamente que $P_{\text{fuente,media}} = P_{R1,\text{media}} + P_{R2,\text{media}} = 1{,}22 + 3{,}08 = 4{,}30\ \text{W}$.

3.5 Formulario y Resumen General del Tema 3 (AC)

Ley / Teorema: Formulario de Referencia Rápida de Corriente Alterna

- **Señal alterna y fasor:** $v(t) = V_m\cos(\omega t + \phi) \longleftrightarrow \mathbf{V} = V_m\angle\phi = V_m e^{j\phi} = V_m\cos\phi + jV_m\sin\phi$, con $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$.
- **Impedancias ($\mathbf{Z} = \mathbf{V}/\mathbf{I}$) y Admitancias ($\mathbf{Y} = 1/\mathbf{Z}$):**

$$\mathbf{Z}_R = R\angle 0^\circ\ \left(\mathbf{Y}_R = \frac{1}{R}\right), \quad \mathbf{Z}_L = j\omega L = \omega L\angle 90^\circ\ \left(\mathbf{Y}_L = \frac{1}{j\omega L}\right), \quad \mathbf{Z}_C = \frac{-j}{\omega C} = \frac{1}{\omega C}\angle -90^\circ\ (\mathbf{Y}_C =$$

- **Función de transferencia y frecuencia de corte:**

$$\mathbf{T}(\omega) = \frac{\mathbf{V}_o(\omega)}{\mathbf{V}_i(\omega)}, \quad |\mathbf{T}(\omega_0)| = \frac{|\mathbf{T}|_{\text{máx}}}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\,|\mathbf{T}|_{\text{máx}}\ (-3\,\text{dB}), \quad |\mathbf{T}|_{\text{dB}} = 20\log_{10}|\mathbf{T}(\omega)|$$

- **Potencia en CA (en el dominio del tiempo):**

$$p(t) = \frac{V_m I_m}{2}\left[\cos(2\omega t + \theta_v + \theta_i) + \cos(\theta_v - \theta_i)\right], \qquad P_{\text{media}} = \frac{V_m I_m}{2}\cos(\theta_v - \theta_i)$$

Tema 4

Dispositivos Electrónicos: Diodos y Transistores MOSFET

Metadatos del Tema y Fuentes:

Asignatura: Fundamentos Físicos y Tecnológicos (1.º Grado en Ingeniería Informática, UGR).

Profesor: Pedro Cartujo (Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores).

Bibliografía de Referencia: Sedra, A. S., Smith, K. C., *Circuitos Microelectrónicos*, Oxford University Press; Boylestad, R. L., Nashelsky, L., *Electrónica: Teoría de Circuitos y Dispositivos Electrónicos*, Pearson.

4.1 Conceptos Básicos de Semiconductores y la Unión PN

Los dispositivos electrónicos de estado sólido basan su funcionamiento en la posibilidad de controlar mediante campos eléctricos o dopaje selectivo la conductividad de los materiales **semiconductores**, entre los cuales el **Silicio (Si)** es el más utilizado en la industria microelectrónica actual (seguido del Germanio, Ge, y compuestos como el Arseniuro de Galio, GaAs).

4.1.1 Bandas de Energía y Semiconductores Intrínsecos

Desde el punto de vista cuántico, los electrones de un cristal sólido se agrupan en bandas de energía permitidas separadas por regiones prohibidas:

- **Banda de Valencia (BV):** Nivel energético ocupado por los electrones que forman los enlaces covalentes entre átomos vecinos de la red cristalina.
- **Banda de Conducción (BC):** Banda energética superior donde los electrones se han desligado de su átomo de origen y pueden desplazarse libremente por el cristal produciendo corriente eléctrica.
- **Banda Prohibida o *Gap* de Energía (E_g):** Separación energética mínima entre el límite superior de la banda de valencia (E_V) y el límite inferior de la banda de conducción (E_C). En un aislante es muy grande ($E_g > 5$ eV), en un conductor las bandas se solapan ($E_g = 0$), y en un semiconductor tiene un valor intermedio ($E_g \approx 1{,}12$ eV en el Silicio y $E_g \approx 0{,}67$ eV en el Germanio a 300 K).

Un semiconductor químicamente puro y con red cristalina perfecta se denomina **semiconductor intrínseco**:

1. **A temperatura nula ($T = 0$ K):** Cada átomo de Silicio (tetravalente, con +4 electrones en su capa exterior) comparte sus cuatro electrones de valencia formando cuatro **enlaces covalentes** estables con sus vecinos. La banda de valencia está completamente llena y la de conducción vacía: el cristal no conduce corriente (se comporta como un aislante perfecto).

2. **A temperatura ambiente ($T = 300$ K):** La agitación térmica proporciona energía suficiente para romper algunos enlaces covalentes (**generación térmica**). Cuando un electrón salta a la banda de conducción convirtiéndose en un **electrón libre** (con carga $-q$), deja tras de sí una vacante de enlace en la banda de valencia denominada **hueco** (h^+, que se comporta como un portador móvil de carga efectiva $+q$). Simultáneamente ocurre el proceso inverso de **recombinación térmica** cuando un electrón libre cae en un hueco.

Ley / Teorema: Concentración Intrínseca y Ley de Acción de Masas

En un semiconductor intrínseco, dado que los electrones libres y los huecos se generan en parejas, sus concentraciones volumétricas (n para electrones y p para huecos) son idénticas e iguales a la **concentración intrínseca** $n_i(T)$:

$$n = p = n_i \approx 1{,}5 \times 10^{10}\ \text{cm}^{-3} \quad \text{(en Silicio a } T = 300 \text{ K)} \tag{4.1}$$

En equilibrio térmico, el producto de las concentraciones de electrones y huecos en cualquier semiconductor (esté o no dopado) permanece constante para una temperatura dada, cumpliendo la **Ley de Acción de Masas**:

$$n \cdot p = n_i^2(T) \tag{4.2}$$

4.1.2 Semiconductores Extrínsecos: Dopaje Tipo N y Tipo P

La conductividad del silicio intrínseco a temperatura ambiente es muy baja. Para aumentarla y controlarla con precisión, se introducen deliberadamente pequeñas cantidades de átomos de impurezas sustitucionales en la red cristalina, proceso denominado **dopaje**:

- **Semiconductor Extrínseco Tipo N (Dopado con Impurezas Donadoras):** Se introducen átomos **pentavalentes** (grupo V de la tabla periódica, con 5 electrones de valencia), tales como **Fósforo (P)**, **Arsénico (As)** o **Antimonio (Sb)**. Cuatro de sus electrones forman enlaces covalentes con los átomos de Silicio vecinos, mientras que el quinto electrón queda muy débilmente ligado y a temperatura ambiente pasa inmediatamente a la banda de conducción como **electrón libre extra**, sin haber creado un hueco. El átomo de impureza queda como un ion positivo fijo (N_D^+) en la red. Si $N_D \gg n_i$ es la concentración de impurezas donadoras:

$$n \approx N_D \gg n_i, \qquad p \approx \frac{n_i^2}{N_D} \ll n_i \implies n > p \tag{4.3}$$

  En un semiconductor tipo N, los **electrones son los portadores mayoritarios** y los **huecos son los portadores minoritarios**.

- **Semiconductor Extrínseco Tipo P (Dopado con Impurezas Aceptoras):** Se introducen átomos **trivalentes** (grupo III de la tabla periódica, con 3 electrones de valencia), tales como **Boro (B)**, **Aluminio (Al)**, **Galio (Ga)** o **Indio (In)**. Al tener solo tres electrones para cuatro enlaces covalentes, queda un enlace incompleto que captura fácilmente un electrón de un átomo de Silicio vecino, generando un **hueco libre** en la banda

de valencia sin crear un electrón en la banda de conducción. El átomo de impureza queda como un ion negativo fijo (N_A^-). Si $N_A \gg n_i$ es la concentración de impurezas aceptoras:

$$p \approx N_A \gg n_i, \qquad n \approx \frac{n_i^2}{N_A} \ll n_i \implies p > n \tag{4.4}$$

En un semiconductor tipo P, los **huecos son los portadores mayoritarios** y los **electrones son los portadores minoritarios**.

4.1.3 Mecanismos de Conducción en Semiconductores

El movimiento neto de cargas en un semiconductor se produce por dos mecanismos físicos independientes:

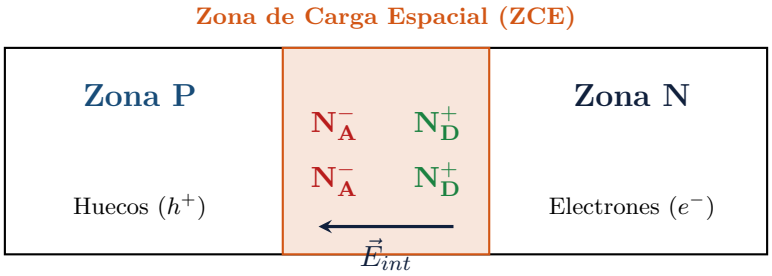
1. **Corriente de Arrastre (o Deriva, *Drift*):** Originada por la presencia de un campo eléctrico $\vec{E}$ que acelera los huecos en el sentido del campo y los electrones en sentido opuesto. La densidad de corriente total de arrastre y la conductividad σ del semiconductor son:
$$\vec{J}_{\text{arrastre}} = \sigma \vec{E} = q(n\mu_n + p\mu_p)\vec{E} \tag{4.5}$$
donde μ_n y μ_p son las movilidades de electrones y huecos respectivamente (en el Silicio $\mu_n \approx 1350\ \text{cm}^2/(\text{V s}) > \mu_p \approx 480\ \text{cm}^2/(\text{V s})$, por lo que los electrones tienen mayor movilidad que los huecos).

2. **Corriente de Difusión:** Originada por la agitación térmica cuando existe un **gradiente espacial de concentración** de portadores ($\frac{dn}{dx}$ o $\frac{dp}{dx}$). Los portadores tienden estadísticamente a desplazarse desde las regiones de alta concentración hacia las de baja concentración:
$$J_{n,\text{dif}} = qD_n \frac{dn}{dx}, \qquad J_{p,\text{dif}} = -qD_p \frac{dp}{dx} \tag{4.6}$$
donde D_n y D_p son las constantes de difusión, ligadas a las movilidades mediante la relación de Einstein: $\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = V_T = \frac{k_B T}{q}$.

4.1.4 La Unión PN en Equilibrio y bajo Polarización

Cuando sobre un mismo monocristal de silicio se crean adyacentes una región dopada tipo P y una región dopada tipo N, la frontera metalúrgica constituye una **unión PN**:

1. **Unión PN en Circuito Abierto (Equilibrio Térmico):** Debido al enorme gradiente de concentración en la frontera, los huecos mayoritarios de la zona P difunden hacia la zona N y los electrones mayoritarios de la zona N difunden hacia la zona P. Al cruzarse en las inmediaciones de la unión, se recombinan entre sí, desapareciendo los portadores móviles libres en una franja central llamada **Zona de Carga Espacial (ZCE)**, **zona de deplexión** o de vaciamiento. Al desaparecer los portadores móviles en la ZCE, quedan al descubierto los **iones fijos de la red**: iones negativos aceptores (N_A^-) en el lado P e iones positivos donadores (N_D^+) en el lado N. Esta distribución dipolar crea un **campo eléctrico interno** $\vec{E}_{int}$ dirigido de la zona N hacia la zona P, el cual se opone a que sigan difundiendo más mayoritarios y establece una **barrera de potencial de contacto** V_0 (o V_{bi}):
$$V_0 = V_T \ln\left(\frac{N_A N_D}{n_i^2}\right) \approx 0{,}6 \text{ a } 0{,}75 \text{ V} \quad \text{(en Silicio a 300 K)} \tag{4.7}$$
siendo $V_T = \frac{k_B T}{q} \approx 26$ mV la tensión térmica a temperatura ambiente ($T = 300$ K). En equilibrio, la corriente de difusión de mayoritarios queda exactamente compensada por la corriente de arrastre de minoritarios ($I_{\text{neta}} = 0$).



- **Unión PN en Polarización Inversa ($V_D < 0$):** Se aplica una fuente externa con el polo positivo en la zona N y el negativo en la zona P. El campo externo tiene el mismo sentido que $\vec{E}_{int}$, reforzando la barrera de potencial hasta $V_0 + |V_D|$ y **ensanchando la zona de deplexión**. La difusión de portadores mayoritarios queda completamente bloqueada y solo circula una debilísima **corriente inversa de saturación** $I_S \approx 10^{-14}$ A (10^{-11} mA) debida al arrastre de portadores minoritarios generados térmicamente.

- **Unión PN en Polarización Directa ($V_D > 0$):** Se conecta el polo positivo externo a la zona P y el negativo a la zona N. El campo externo se opone a $\vec{E}_{int}$, reduciendo la barrera de potencial a $V_0 - V_D$ y **estrechando la zona de deplexión**. Cuando V_D supera el umbral $V_\gamma \approx 0{,}6 - 0{,}7$ V, la barrera prácticamente desaparece y se produce una inyección masiva exponencial de portadores mayoritarios a través de la unión.

4.2 El Diodo y Circuitos Básicos

Un **diodo de unión** es una unión PN a la que se le añaden dos contactos óhmicos exteriores: el **Ánodo (A)** en la región P y el **Cátodo (K)** en la región N. Su tensión en bornes se define siempre de ánodo a cátodo ($V_D = V_{\text{Ánodo}} - V_{\text{Cátodo}}$) y su corriente positiva I_D fluye de ánodo a cátodo (en el sentido de la flecha del símbolo).

4.2.1 Ecuación de Shockley y Curva Característica Real

Ley / Teorema: Ecuación de Shockley del Diodo

En primera aproximación, la característica corriente-tensión ($I_D - V_D$) del diodo en las zonas directa e inversa viene descrita por la ecuación exponencial de Shockley:

$$I_D = I_S \left(e^{\frac{V_D}{nV_T}} - 1 \right) \tag{4.8}$$

donde:

- I_S: corriente inversa de saturación (típicamente $I_S \approx 10^{-14}$ A $= 10^{-11}$ mA).
- $V_T = \frac{kT}{q}$: tensión térmica, donde $k = 1{,}38 \times 10^{-23}$ J/K es la constante de Boltzmann, T la temperatura absoluta en Kelvin y $q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C la carga del electrón. A temperatura ambiente ($T = 300$ K), $V_T \approx 26$ mV $= 0{,}026$ V.
- n: factor de idealidad (en los apuntes de la asignatura se toma habitualmente $n = 1$).

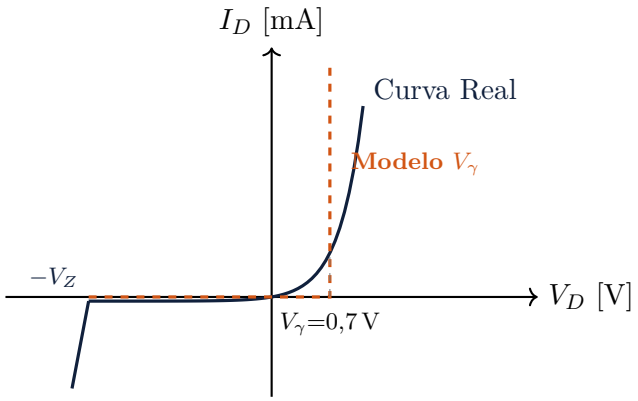
En la curva característica real de un diodo se distinguen tres regiones:

1. **Zona Directa ($V_D > 0$):** Para $V_D < V_\gamma \approx 0{,}6 - 0{,}7$ V la corriente es casi despreciable; al superar la tensión umbral V_γ, la intensidad crece exponencialmente con pendientes muy

abruptas. En directa, el diodo no puede soportar tensiones mucho mayores que V_γ porque la enorme corriente disiparía una potencia excesiva y fundiría el dispositivo.

2. **Zona Inversa ($-V_{ZK} < V_D < 0$):** Como $e^{V_D/V_T} \ll 1$, la corriente vale $I_D \approx -I_S \approx 0$. El diodo actúa prácticamente como un circuito abierto.

3. **Zona de Ruptura o Avalancha ($V_D \leq -V_{ZK}$):** Si la tensión inversa supera un valor crítico denominado tensión de ruptura (V_Z o V_{BR}, del orden de -100 V en diodos rectificadores comunes y entre -3 V y -15 V en diodos Zener), se produce una multiplicación por avalancha o efecto túnel Zener y circula una gran corriente inversa mientras la tensión permanece casi fija en $-V_Z$.



4.2.2 Los 3 Modelos Lineales por Tramos del Diodo

Dado que la ecuación de Shockley es no lineal, para resolver circuitos de forma rápida y sistemática sustituimos el diodo por uno de los tres **modelos lineales por tramos**:

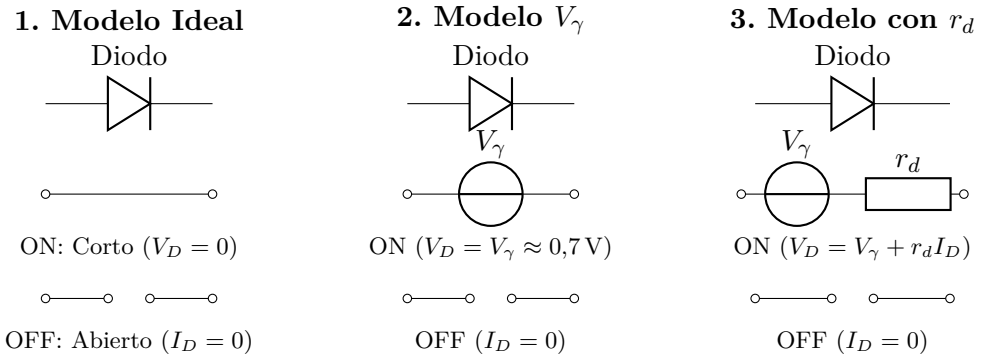
Método Sistemático: Los 3 Modelos Lineales del Diodo

1. **Modelo 1: Diodo Ideal (no se suele usar salvo si $V \gg V_\gamma$):**
   - **Diodo OFF (Corte):** Si $V_D < 0 \implies I_D = 0$ (equivalente a un **circuito abierto**).
   - **Diodo ON (Conducción):** Si $I_D > 0 \implies V_D = 0$ V (equivalente a un **cortocircuito / cable ideal**).

2. **Modelo 2: Caída de Tensión Constante V_γ (el más utilizado con resistencias grandes):**
   - **Diodo OFF (Corte):** Si $V_D < V_\gamma \implies I_D = 0$ (**circuito abierto**).
   - **Diodo ON (Conducción):** Si $I_D > 0 \implies V_D = V_\gamma$ constante (habitualmente $V_\gamma = 0{,}7$ V o $0{,}65$ V). Se sustituye por una **fuente de tensión independiente** V_γ con el polo $+$ en el ánodo y el $-$ en el cátodo.

3. **Modelo 3: Tensión Variable con Resistencia Serie r_d (usado con resistencias pequeñas):**
   - **Diodo OFF (Corte):** Si $V_D < V_\gamma \implies I_D = 0$ (**circuito abierto**).
   - **Diodo ON (Conducción):** Si $I_D > 0$, el diodo se sustituye por una fuente V_γ en serie con una resistencia interna r_d (de unos pocos ohmios, p. ej. $10 - 20\ \Omega$):

$$V_D = V_\gamma + I_D r_d \iff I_D = \frac{V_D - V_\gamma}{r_d} \quad \left(\text{recta de pendiente } \frac{1}{r_d}\right) \tag{4.9}$$



4.2.3 Los 3 Métodos de Resolución de un Circuito con Diodo

Consideremos el circuito elemental formado por una fuente continua $V_{DD} = 5$ V en serie con una resistencia $R = 1$ kΩ y un diodo ($I_S = 10^{-11}$ mA $= 10^{-14}$ A, $V_T = 26$ mV).

Importante / Ojo Examen: Convenio de Unidades en Electrónica

En todos los problemas de diodos y transistores trabajaremos sistemáticamente con:

$$V \text{ en voltios [V]}, \qquad I \text{ en miliamperios [mA]}, \qquad R \text{ en kiloohmios [k}\Omega\text{]} \tag{4.10}$$

ya que V = mA × kΩ es un sistema de unidades internamente consistente.

1. **Método Analítico (con el diodo real):** Planteamos simultáneamente la ecuación de malla del circuito y la ecuación de Shockley del dispositivo:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Circuito:} & V_{DD} = I_D R + V_D \\ \text{Dispositivo:} & I_D = I_S\left(e^{V_D/V_T} - 1\right) \end{array}\right\} \Longrightarrow V_D = V_{DD} - R I_S\left(e^{V_D/V_T} - 1\right) \tag{4.11}$$

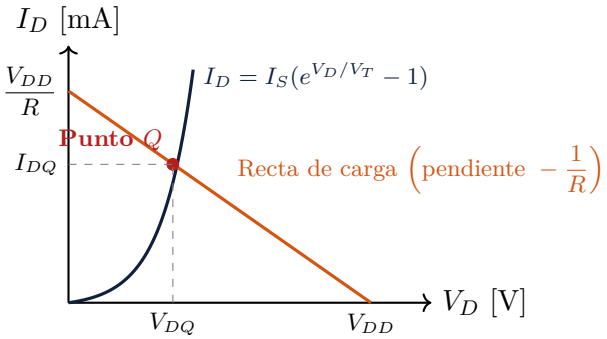
   Es una ecuación trascendente que se resuelve por **aproximaciones sucesivas** (iteración numérica) probando valores de V_D entre 0,6 V y 0,8 V (por ejemplo $V_D^{(0)} = 0{,}65$ V). Para $V_{DD} = 5$ V y $R = 1$ kΩ converge a:

$$V_D = 0{,}696 \text{ V}, \qquad I_D = \frac{5 - 0{,}696}{1\ \text{k}\Omega} = 4{,}304 \text{ mA} \approx 4{,}3 \text{ mA} \tag{4.12}$$

2. **Método Gráfico (Recta de Carga y Punto de Funcionamiento Q):** Despejando I_D de la ecuación de malla obtenemos la **recta de carga estática**:

$$I_D = -\frac{1}{R} V_D + \frac{V_{DD}}{R} \tag{4.13}$$

   Es una recta de pendiente $-\frac{1}{R}$ que corta al eje vertical en $\left(0, \frac{V_{DD}}{R}\right)$ y al eje horizontal en $(V_{DD}, 0)$. La intersección gráfica entre la recta de carga y la curva característica del diodo determina el **punto de trabajo o punto de operación** $Q(V_{DQ}, I_{DQ})$.



3. **Método Lineal por Hipótesis y Comprobación (el más utilizado):**

   a) **Paso 1 (Hipótesis):** Suponer el estado de cada diodo (**OFF** u **ON**). Si no se ve claro a simple vista, es muy cómodo empezar suponiendo que los diodos están en **OFF** (circuito abierto) y calcular las tensiones en sus bornes para ver cuál tiene mayor tensión ánodo-cátodo.

   b) **Paso 2 (Sustitución y cálculo):** Sustituir cada diodo según el modelo lineal indicado (2.° o 3.$^{\text{er}}$ modelo) y resolver el circuito lineal resultante.

   c) **Paso 3 (Comprobación obligatoria):**

   - Si se supuso **Diodo OFF**: debe cumplirse que $V_D = V_{\text{Ánodo}} - V_{\text{Cátodo}} < V_\gamma$.
   - Si se supuso **Diodo ON**: debe cumplirse que la corriente I_D circule de ánodo a cátodo con valor estrictamente positivo ($I_D > 0$).

   Si no coincide con la suposición, la hipótesis es falsa y se cambia de estado.

Aplicado al circuito con $V_{DD} = 5$ V y $R = 1$ kΩ ($V_\gamma = 0{,}65$ V, $r_d = 10\ \Omega = 0{,}01$ kΩ):

- Si suponemos D OFF: $I_D = 0 \implies V_R = 0 \implies V_D = 5\text{ V} > 0{,}65\text{ V} \implies$ contradicción (la suposición OFF es falsa; el diodo conduce en ON).
- Con el **2.º modelo** (D ON $\equiv V_\gamma = 0{,}65$ V):

$$I_D = \frac{V_{DD} - V_\gamma}{R} = \frac{5 - 0{,}65}{1\text{ k}\Omega} = 4{,}35\text{ mA} > 0, \qquad V_D = 0{,}65\text{ V} \tag{4.14}$$

- Con el **3.er modelo** (D ON $\equiv V_\gamma = 0{,}65$ V en serie con $r_d = 0{,}01$ kΩ):

$$I_D = \frac{V_{DD} - V_\gamma}{R + r_d} = \frac{5 - 0{,}65}{1 + 0{,}01} = 4{,}307\text{ mA} > 0, \qquad V_D = V_\gamma + I_D r_d = 0{,}693\text{ V} \tag{4.15}$$

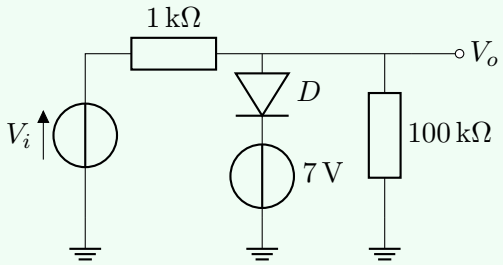
4.2.4 Aplicaciones Clásicas del Diodo: Limitadores, Rectificadores, Filtros y Zener

1. Circuitos Limitadores o Recortadores (*Clippers*)

Los circuitos limitadores se emplean para recortar una porción de la señal de entrada por encima o por debajo de un nivel de referencia, protegiendo etapas posteriores.

Ejemplo Explicado: Circuito Limitador Polarizado de los Apuntes

En el circuito de la figura, una entrada V_i alimenta a través de una resistencia serie de 1 kΩ el nudo de salida V_o, del cual cuelgan en paralelo una rama con un diodo D ($V_\gamma = 0{,}65$ V) en serie con una fuente continua de 7 V, y una resistencia de carga de 100 kΩ a masa.



- **Tramo a) Diodo en Corte (OFF):** Para que el diodo conduzca se necesita que el potencial de su ánodo (V_o) supere el potencial de su cátodo (7 V) en al menos $V_\gamma = 0{,}65$ V, es decir, $V_o \geq 7 + 0{,}65 = 7{,}65$ V. Mientras $V_o < 7{,}65$ V, el diodo está en **OFF** (abierto) y el circuito actúa como un simple divisor de tensión resistivo:

$$V_o = \frac{100\ \text{k}\Omega}{1\ \text{k}\Omega + 100\ \text{k}\Omega} V_i = \frac{100}{101} V_i \tag{4.16}$$

- **Tramo b) Umbral de Conducción:** El diodo entra en conducción exactamente cuando $V_o = 7{,}65$ V, lo que corresponde a una tensión de entrada:

$$V_i = \frac{101}{100} V_o = \frac{101}{100} \times 7{,}65 = 7{,}7265\ \text{V} \approx 7{,}73\ \text{V} \tag{4.17}$$

- **Tramo c) Diodo en Conducción (ON, para $V_i \geq 7{,}73$ V):**
  - Con el **3.er modelo** ($V_\gamma = 0{,}65$ V y resistencia dinámica r_d): aplicando la ley de corrientes de Kirchhoff en el nudo V_o:

$$\frac{V_i - V_o}{1} = \frac{V_o - 7{,}65}{r_d} + \frac{V_o}{100} \implies V_o = \frac{7{,}65 \times 100}{100 + 101 r_d} + \frac{100 r_d}{100 + 101 r_d} V_i \tag{4.18}$$

  - Con el **2.º modelo** ($r_d = 0$, el más sencillo): la rama del diodo fija rígidamente la tensión de salida en:

$$V_o = 7 + 0{,}65 = 7{,}65\ \text{V} \quad \text{(fijo)} \tag{4.19}$$

    Cualquier aumento adicional de V_i incrementa la corriente por la resistencia de 1 kΩ y se desvía íntegramente por el diodo, manteniendo limitada la tensión V_o.

2. Rectificador de Media Onda

Un circuito rectificador convierte una señal alterna sinusoidal ($v_i(t) = V_p \sin(\omega t)$, de valor medio nulo) en una señal unidireccional pulsante con componente continua no nula:

- **Con el 2.º modelo del diodo ($V_\gamma = 0{,}65 - 0{,}7$ V):**

$$\text{Si } v_i(t) < V_\gamma \implies D \text{ OFF} \implies I_D = 0 \implies v_o(t) = I_D R = 0\ \text{V} \tag{4.20}$$

$$\text{Si } v_i(t) \geq V_\gamma \implies D \text{ ON} \implies v_o(t) = v_i(t) - V_\gamma \tag{4.21}$$

  El valor de pico de salida es $V_{o,\text{máx}} = V_p - V_\gamma$ y su valor medio en continua es $V_{dc} = \frac{V_p - V_\gamma}{\pi}$.

- **Con el 1.er modelo (ideal):** Conduce durante todo el semiciclo positivo ($v_o(t) = v_i(t)$ para $v_i > 0$) y bloquea el semiciclo negativo ($v_o(t) = 0$ para $v_i < 0$).

- **Con el 3.er modelo (V_{D0} y r_D):** Para $v_i(t) \geq V_{D0}$, forma un divisor resistivo de pendiente $\frac{R}{R+r_D}$, dando $v_o(t) = \frac{R}{R+r_D}\,(v_i(t) - V_{D0})$.

3. Rectificador de Onda Completa y Filtrado por Condensador

Para aprovechar ambos semiciclos de la señal alterna se emplea el **rectificador de onda completa**, ya sea mediante un transformador de toma intermedia con 2 diodos, o mediante el **puente de Graetz de 4 diodos**:

- En cada semiciclo conducen **dos diodos en serie** (D_1 y D_2 cuando $v_i > 2V_\gamma$; D_3 y D_4 en el semiciclo opuesto cuando $|v_i| > 2V_\gamma$), de modo que la caída umbral total es $2V_\gamma \approx 1{,}3 - 1{,}4$ V:

$$I = \frac{|v_i| - 2V_\gamma}{R_L}, \qquad V_{o,\text{máx}} = V_p - 2V_\gamma, \qquad V_{dc} = \frac{2(V_p - 2V_\gamma)}{\pi} \tag{4.22}$$

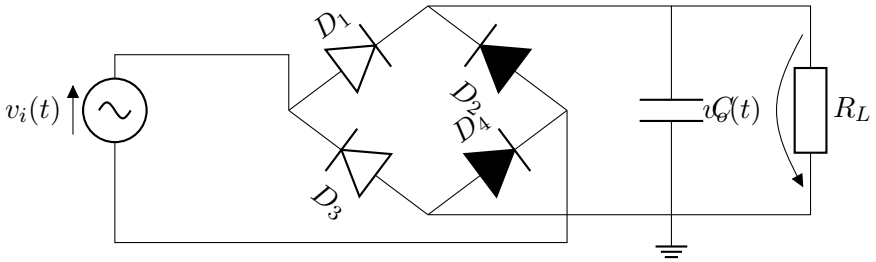
  Por ejemplo, con $V_\gamma = 0{,}7$ V, cuando $V_i = 5$ V la salida toma el valor $V_o = 5 - 1{,}4 = 3{,}6$ V.

- **Filtro por Condensador (C en paralelo con R_L):** Al colocar un condensador en paralelo con la resistencia de carga, el condensador se carga hasta el valor de pico $V_{\text{máx}}$ cuando los diodos conducen y, cuando la tensión de entrada desciende, los diodos entran en corte y el condensador se descarga lentamente a través de R_L con constante de tiempo $\tau = R_L C \gg T$. Se obtiene así una tensión casi continua con un pequeño **rizado** pico a pico:

$$V_r \approx \frac{V_{\text{máx}}}{f_{\text{rizado}} R_L C} = \frac{I_{dc}}{f_{\text{rizado}} C} \tag{4.23}$$

  donde $f_{\text{rizado}} = f_{\text{red}}$ en media onda y $f_{\text{rizado}} = 2f_{\text{red}}$ en onda completa.

Rectificador de Onda Completa en Puente con Filtro C



4. El Diodo Zener, LED y Fotodiodo

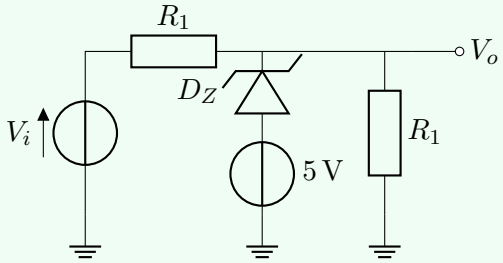
- **Diodo Zener:** Es un diodo diseñado específicamente para trabajar también en la **región de ruptura inversa** a partir de una tensión de ruptura Zener controlada V_Z (p. ej. $|V_Z| = 3$ V, 5 V, 10 V). En el 2.º modelo lineal presenta **tres estados posibles**:

  1. **Conducción Directa (D ON directo):** Si $I_D > 0$ (de ánodo a cátodo), se comporta como un diodo normal con $V_D = V_{\text{Ánodo}} - V_{\text{Cátodo}} = V_\gamma = 0{,}7$ V.
  2. **Corte (D OFF):** Si $-|V_Z| < V_D < V_\gamma$, no conduce ($I_D = I_Z = 0$, circuito abierto).
  3. **Conducción en Ruptura Inversa (D ON inverso / Zener):** Si la tensión inversa en el cátodo respecto al ánodo alcanza $|V_Z|$ ($V_D = -|V_Z|$, es decir, $V_{\text{Cátodo}} - V_{\text{Ánodo}} = |V_Z|$), conduce una corriente inversa $I_Z > 0$ de cátodo a ánodo manteniendo fija la caída $|V_Z|$ (se sustituye por una fuente independiente de valor $|V_Z|$ con el polo + en el cátodo y el − en el ánodo).

- **Diodo Emisor de Luz (LED) y Fotodiodo:** En un **LED** (fabricado con semiconductores de gap directo como GaAsP o GaN), la recombinación de electrones y huecos en polarización directa libera fotones de luz ($h\nu \approx E_g$), presentando una caída umbral mayor ($V_\gamma \approx 1{,}8 - 3{,}2$ V). En cambio, un **fotodiodo** opera polarizado en inversa: al incidir luz sobre la zona de deplexión se generan pares electrón-hueco que incrementan proporcionalmente la corriente inversa.

Ejemplo Explicado: Limitador de Doble Nivel con Diodo Zener de los Apuntes

En el circuito de la figura, las dos resistencias son iguales (R_1) y el diodo Zener tiene $V_\gamma = 0{,}7$ V y tensión de ruptura inversa $V_Z = -3$ V ($|V_Z| = 3$ V), estando su ánodo conectado a una fuente de 5 V y su cátodo al nudo de salida V_o.



1. **Zona en Corte (OFF):** Cuando el Zener no conduce, el circuito es un divisor de tensión con dos resistencias iguales R_1:

$$V_o = \frac{R_1}{R_1 + R_1} V_i = \frac{V_i}{2} \tag{4.24}$$

   Como el ánodo está a 5 V y el cátodo a V_o, la tensión ánodo-cátodo es $V_D = 5 - V_o$. El Zener permanece en OFF mientras -3 V $< 5 - V_o < 0{,}7$ V, es decir:

$$4{,}3 \text{ V} < V_o < 8 \text{ V} \iff 8{,}6 \text{ V} < V_i < 16 \text{ V} \implies V_o = \frac{V_i}{2} \tag{4.25}$$

2. **Conducción en Directa ($V_i \leq 8{,}6$ V):** Cuando V_o intenta bajar de 4,3 V, el diodo entra en conducción directa fijando $V_o = 5 - 0{,}7 = 4{,}3$ V.

3. **Conducción en Ruptura Inversa ($V_i \geq 16$ V):** Cuando V_o intenta superar 8 V, el Zener entra en ruptura inversa fijando $V_o = 5 + 3 = 8$ V.

4.3 El Transistor MOSFET y Circuitos Básicos

El transistor de efecto de campo metal-óxido-semiconductor (**MOSFET**) es un dispositivo electrónico de cuatro terminales en el que la corriente que circula por un canal semiconductor entre el **Drenador (D)** y la **Fuente (S)** se controla mediante la tensión aplicada al terminal de **Puerta (G)**.

4.3.1 Estructura Física, Terminales y Símbolos

En un transistor **NMOS de enriquecimiento**:

- Sobre un **sustrato semiconductor tipo P** (*Bulk* o *Body*, terminal **B**) se difunden dos regiones fuertemente dopadas tipo n^+ que constituyen la **Fuente (S, *Source*)** y el **Drenador (D, *Drain*)**.

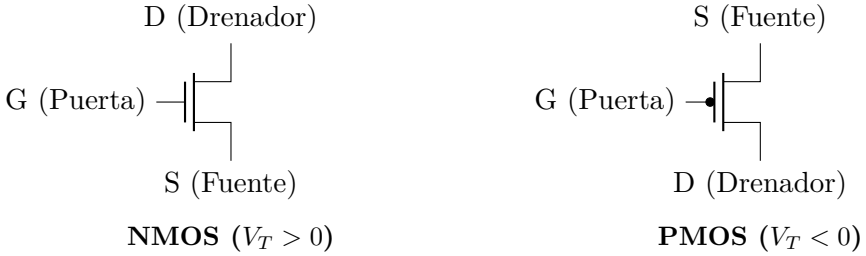
- La región comprendida entre Fuente y Drenador (de longitud geométrica L y anchura W) se recubre con una fina capa aislante de **dióxido de silicio (SiO_2, óxido de puerta)** sobre la que se deposita el electrodo conductor de **Puerta (G, *Gate*)**.
- Como la puerta está separada del canal por un dieléctrico aislante (SiO_2), **la corriente de puerta es siempre rigurosamente nula en continua**:

$$I_G = 0 \implies I_D = I_S \tag{4.26}$$

- Habitualmente el sustrato **B** se conecta internamente al terminal de Fuente **S** ($B = S$), pasando de la notación de cuatro terminales a la de tres terminales (G, D, S).

Clasificación de los transistores MOS:

1. **NMOS de Enriquecimiento ($V_T > 0$):** Con $V_{GS} = 0$ no existe canal entre D y S (interruptor abierto). Hace falta aplicar una tensión positiva $V_{GS} > V_T$ en la puerta para atraer electrones e inducir el canal tipo N.
2. **PMOS de Enriquecimiento ($V_T < 0$):** Fabricado sobre sustrato tipo N con pozos p^+. Hace falta aplicar una tensión negativa en la puerta respecto a la fuente ($V_{GS} < V_{Tp} < 0$, o equivalentemente $V_{SG} > |V_{Tp}|$) para inducir un canal de huecos tipo P.
3. **MOSFET de Deplexión (p. ej. NMOS con $V_T < 0$):** El canal físico ya está implantado de fábrica, por lo que conduce corriente incluso sin aplicar tensión en la puerta ($V_{GS} = 0$). Para apagarlo hay que aplicar una tensión negativa $V_{GS} < V_T < 0$ que vacíe el canal. En su símbolo el trazo vertical del canal se dibuja continuo y más grueso.



NMOS ($V_T > 0$) **PMOS ($V_T < 0$)**

4.3.2 Regiones de Operación y Ecuaciones del NMOS y PMOS

Definimos el **parámetro de transconductancia** k_n (denotado en las hojas manuscritas como K_n o K) que mide cuánto conduce el transistor en función de su tecnología y geometría:

$$k_n = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} \quad \left[\text{A/V}^2 \text{ o mA/V}^2\right] \tag{4.27}$$

donde μ_n es la movilidad de los portadores en el canal, $C_{ox} = \frac{\varepsilon_{ox}}{t_{ox}}$ es la capacidad del óxido de puerta por unidad de área, W la anchura del canal y L la longitud del canal (en tecnologías actuales del orden de nanómetros). *Nota sobre notación:* En las hojas de problemas de la asignatura se escribe $I_D = \frac{K}{2}(V_{GS} - V_T)^2$ en saturación y $I_D = K\left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{1}{2}V_{DS}^2\right]$ en región lineal, donde el dato del enunciado $K \equiv k_n$.

Ley / Teorema: Modos de Operación del Transistor NMOS ($V_{Tn} > 0$ en enriquecimiento)

1. **1) Región de Corte (NMOS OFF):**

$$V_{GS} < V_{Tn} \implies I_D = 0 \tag{4.28}$$

El transistor equivale a un circuito abierto entre Drenador y Fuente ($I_D = I_S = 0$).

2. **2) Región Lineal, Óhmica o Tríodo (NMOS ON con V_{DS} pequeña):**

$$V_{GS} \geq V_{Tn} \quad \text{y} \quad V_{DS} < V_{GS} - V_{Tn} \tag{4.29}$$

El canal está abierto de extremo a extremo y la corriente depende tanto de V_{GS} como de V_{DS}:

$$I_{DS} = k_n \left[(V_{GS} - V_{Tn}) V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2 \right] \tag{4.30}$$

3. **3) Región de Saturación (NMOS ON con V_{DS} grande):**

$$V_{GS} \geq V_{Tn} \quad \text{y} \quad V_{DS} \geq V_{GS} - V_{Tn} \tag{4.31}$$

El canal se estrangula junto al drenador (*pinch-off*) y la corriente depende cuadráticamente solo de V_{GS}:

$$I_{DS} = \frac{k_n}{2} (V_{GS} - V_{Tn})^2 \tag{4.32}$$

Ley / Teorema: Modos de Operación del Transistor PMOS ($V_{Tp} < 0$ en enriquecimiento)

En un transistor PMOS todas las desigualdades se invierten respecto al NMOS (o bien se trabaja con valores positivos invirtiendo los subíndices $V_{SG} = -V_{GS}$ y $V_{SD} = -V_{DS}$):

1. **1) Región de Corte (PMOS OFF):**

$$V_{GS} > V_{Tp} \quad (\text{es decir, } V_{SG} < |V_{Tp}|) \implies I_{SD} = 0 \tag{4.33}$$

2. **2) Región Lineal o Tríodo (PMOS ON):**

$$V_{GS} \leq V_{Tp} \quad \text{y} \quad V_{DS} > V_{GS} - V_{Tp} \quad (\text{es decir, } V_{SD} < V_{SG} - |V_{Tp}|) \tag{4.34}$$

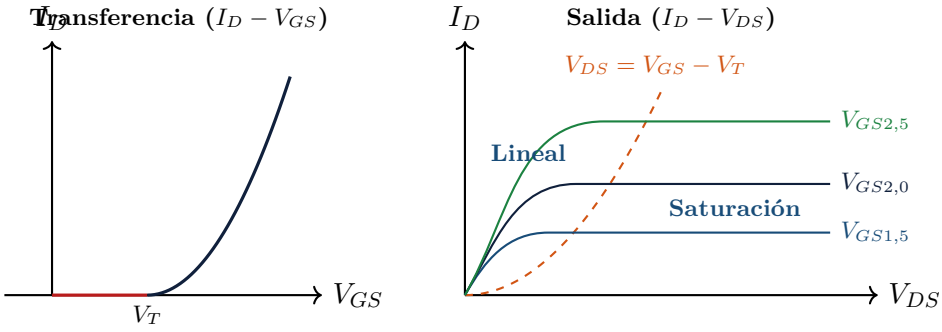
$$I_{SD} = k_p \left[(V_{GS} - V_{Tp}) V_{DS} - \frac{1}{2} V_{DS}^2 \right] = k_p \left[(V_{SG} - |V_{Tp}|) V_{SD} - \frac{1}{2} V_{SD}^2 \right] \tag{4.35}$$

3. **3) Región de Saturación (PMOS ON):**

$$V_{GS} \leq V_{Tp} \quad \text{y} \quad V_{DS} \leq V_{GS} - V_{Tp} \quad (\text{es decir, } V_{SD} \geq V_{SG} - |V_{Tp}|) \tag{4.36}$$

$$I_{SD} = \frac{k_p}{2} (V_{GS} - V_{Tp})^2 = \frac{k_p}{2} (V_{SG} - |V_{Tp}|)^2 \tag{4.37}$$

4.3.3 Curvas Características y Cuadro Resumen de Resolución



Importante / Ojo Examen: Cuadro Resumen de Resolución de Circuitos con Diodos y MOSFET

Dispositivo	Estado / Región	Condición y Modelo Circuital
Diodo (Modelo 1)	OFF / ON	$V_D < 0 \implies I_D = 0$ (abierto) / $I_D > 0 \implies V_D = 0$ (corto)
Diodo (Modelo 2)	OFF / ON	$V_D < V_\gamma \implies I_D = 0$ / $I_D > 0 \implies V_D = V_\gamma \approx 0{,}7\,\text{V}$
Diodo (Modelo 3)	OFF / ON	$V_D < V_\gamma \implies I_D = 0$ / $I_D > 0 \implies V_D = V_\gamma + I_D r_d$
Diodo Zener	Directo / OFF / Inverso	$V_D = 0{,}7\,\text{V}$ $(I_D > 0)$ / $-\lvert V_Z\rvert < V_D < 0{,}7\,\text{V}$ / $V_D = -\lvert V_Z\rvert$ $(I_Z > 0)$
NMOS ($I_G = 0$)	1) Corte (OFF)	$V_{GS} < V_{Tn} \implies I_D = 0$
	2) Lineal (Tríodo)	$V_{GS} > V_{Tn}$ y $V_{DS} < V_{GS} - V_{Tn} \implies I_D = k_n\left[(V_{GS} - V_{Tn})V_{DS} - \frac{1}{2}V_{DS}^2\right]$
	3) Saturación	$V_{GS} > V_{Tn}$ y $V_{DS} \geq V_{GS} - V_{Tn} \implies I_D = \frac{k_n}{2}(V_{GS} - V_{Tn})^2$

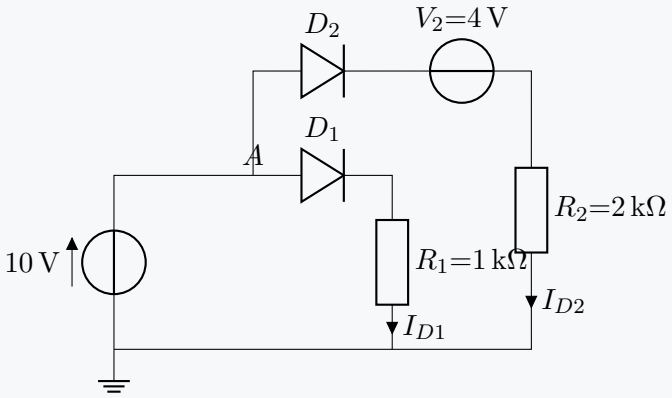
Regla de Oro para el MOSFET:

1. Usar siempre que $I_G = 0$ para hallar V_G (divisor de tensión en la puerta). Suponer inicialmente OFF ($I_D = 0$) para ver si $V_{GS} > V_T$.
2. Cuando el transistor conduce ($V_{GS} > V_T$), **se suele suponer primero que está en SATURACIÓN**, se resuelven las 3 ecuaciones con 3 incógnitas (I_D, V_{GS}, V_{DS}) y se comprueba si $V_{DS} \geq V_{GS} - V_T$. Si no se cumple, está en la región **lineal** y se recalculan las ecuaciones con la fórmula de tríodo.
3. **Caso especial (Puerta y Drenador cortocircuitados):** Si G y D están unidos (directamente o mediante una resistencia por la que no pasa corriente al ser $I_G = 0$), entonces $V_G = V_D \implies V_{DS} = V_{GS}$. Como $V_T > 0$, se cumple automáticamente que $V_{DS} > V_{GS} - V_T$, por lo que **si conduce, está garantizado en SATURACIÓN**.

4.4 Ejercicios Resueltos de Diodos y Transistores MOSFET

Ejercicio Resuelto: Circuito con Diodos de Dos Ramas — Examen Parcial 2 FFT

Determinar el estado de conducción (ON/OFF), las corrientes por cada rama y las caídas de tensión en el circuito de la figura empleando el segundo modelo lineal con $V_\gamma = 0{,}7$ V.



Solución Paso a Paso:

El potencial en el nudo A común a ambos ánodos es $V_A = 10$ V. Si suponemos ambos en OFF, $V_{K1} = 0$ V ($V_{D1} = 10$ V $> 0{,}7$ V) y $V_{K2} = 4$ V ($V_{D2} = 6$ V $> 0{,}7$ V). Por tanto, suponemos D_1 **ON y** D_2 **ON**:

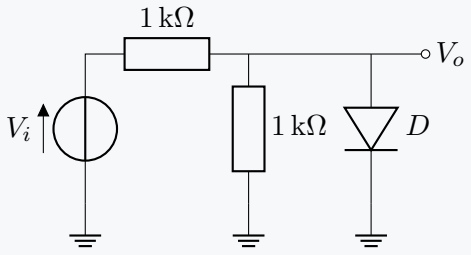
$$V_{K1} = V_A - V_\gamma = 10 - 0{,}7 = 9{,}3 \text{ V} \implies I_{D1} = \frac{9{,}3 \text{ V}}{1 \text{ k}\Omega} = 9{,}3 \text{ mA} > 0 \quad \text{(ON confirmado)} \tag{4.38}$$

$$V_{K2} = V_A - V_\gamma = 10 - 0{,}7 = 9{,}3 \text{ V} \implies I_{D2} = \frac{9{,}3 - 4}{2 \text{ k}\Omega} = 2{,}65 \text{ mA} > 0 \quad \text{(ON confirmado)} \tag{4.39}$$

La corriente total suministrada por la fuente de 10 V es $I_{\text{total}} = I_{D1} + I_{D2} = 9{,}3 + 2{,}65 = 11{,}95$ mA.

Ejercicio Resuelto: Característica de Transferencia de Limitador Simple — Ejercicio 4 Apuntes

Calcular y representar la característica de transferencia V_o en función de V_i si se toma la salida en bornes del diodo usando el 2.º modelo lineal ($V_\gamma = 0{,}7$ V). Ambas resistencias valen $R = 1$ kΩ.



Solución Paso a Paso:

Como el cátodo está a masa (0 V), la tensión en el diodo es $V_D = V_{\text{Ánodo}} - V_{\text{Cátodo}} = V_o$.

- **Diodo OFF ($V_o < V_\gamma = 0{,}7$ V):** El diodo es un circuito abierto y las dos resistencias de 1 kΩ forman un divisor de tensión:

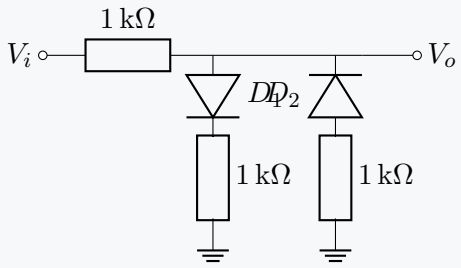
$$V_o = V_i \frac{R}{R + R} = \frac{V_i}{2} \tag{4.40}$$

  El diodo empieza a conducir cuando $V_o = 0{,}7$ V $\implies V_i = 2V_o = 2 \times 0{,}7 = 1{,}4$ V.

- **Resumen de tramos:**
  - Para $V_i < 1{,}4$ V: **Diodo OFF** $\Longrightarrow$ $V_o = \dfrac{V_i}{2}$ (recta de pendiente 1/2 que pasa por el origen).
  - Para $V_i \geq 1{,}4$ V: **Diodo ON** $\Longrightarrow$ $V_o = V_\gamma = 0{,}7$ V (constante fija sea cual sea V_i).

Ejercicio Resuelto: Característica de Transferencia con Dos Ramas Antiparalelas — Ejercicio 5 Apuntes

Calcular y dibujar la característica de transferencia $V_o(V_i)$ del circuito de la figura usando el 2.º modelo lineal con $V_\gamma = 0{,}7$ V para D_1 y D_2. Todas las resistencias son de $R = 1$ kΩ.



Solución Paso a Paso:

A) **Región A ($-V_\gamma \leq V_i \leq V_\gamma$, es decir, $-0{,}7$ V $\leq V_i \leq 0{,}7$ V):** Tanto D_1 como D_2 están en **OFF**. No circula corriente por ninguna rama ($I = 0$), luego no hay caída en la resistencia de entrada y:

$$V_o = V_i \quad \text{(recta de pendiente 1)} \tag{4.41}$$

B) **Región B ($V_i > V_\gamma = 0{,}7$ V):** Conduce D_1 **ON** y D_2 **OFF**. La corriente que circula por la malla única (resistencia de entrada, D_1 y su resistencia inferior R) es:

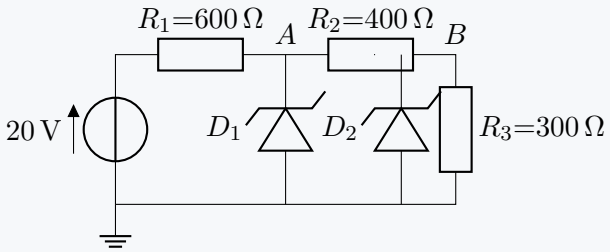
$$I = \frac{V_i - V_\gamma}{2R} \Longrightarrow V_o = V_\gamma + IR = V_\gamma + \frac{V_i - V_\gamma}{2} = \frac{V_i + V_\gamma}{2} = \frac{V_i + 0{,}7}{2} \quad \left(\text{pendiente } \frac{1}{2}\right) \tag{4.42}$$

C) **Región C ($V_i < -V_\gamma = -0{,}7$ V):** Conduce D_2 **ON** y D_1 **OFF**. La corriente de malla es:

$$I = \frac{V_i + V_\gamma}{2R} \Longrightarrow V_o = -V_\gamma + IR = \frac{V_i - V_\gamma}{2} = \frac{V_i - 0{,}7}{2} \quad \left(\text{pendiente } \frac{1}{2}\right) \tag{4.43}$$

Ejercicio Resuelto: Red en Escalera con Dos Diodos Zener — Ejercicio 6 Apuntes

En el circuito de la figura, las tensiones inversas de ruptura de los diodos son $V_{Z1} = 10$ V y $V_{Z2} = 8$ V, con $V_i = 20$ V, $R_1 = 600\ \Omega$, $R_2 = 400\ \Omega$ y $R_3 = 300\ \Omega$. Calcular las corrientes que circulan a través de cada una de las resistencias.



Solución Paso a Paso:

1) **Hipótesis inicial (ambos Zener en OFF):** Calculamos la corriente y las tensiones en los nudos A y B sin diodos:

$$I = \frac{20\text{ V}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{20\text{ V}}{0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3\text{ k}\Omega} = \frac{20}{1{,}3} = 15{,}38\text{ mA} \tag{4.44}$$

$$V_B = I \cdot R_3 = 15{,}38 \times 0{,}3 = 4{,}61\text{ V} < 8\text{ V} \implies D_2 \text{ está en OFF } (V_{D2} = -4{,}61\text{ V} > -8\text{ V}) \tag{4.45}$$

$$V_A = I(R_2 + R_3) = 15{,}38 \times 0{,}7 = 10{,}77\text{ V} > 10\text{ V} \implies D_1 \text{ entra en ruptura inversa ON} \tag{4.46}$$

2) **Resolución con D_1 ON en Zener ($V_A = |V_{Z1}| = 10$ V) y D_2 OFF:**

$$I_{R2} = I_{R3} = \frac{V_A}{R_2 + R_3} = \frac{10\text{ V}}{0{,}4 + 0{,}3\text{ k}\Omega} = \frac{10}{0{,}7} = 14{,}285\text{ mA} \tag{4.47}$$

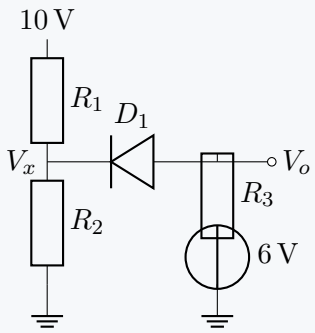
$$V_B = I_{R3} \cdot R_3 = 14{,}285 \times 0{,}3 = 4{,}285\text{ V} < 8\text{ V} \implies D_2 \text{ sigue en OFF (confirmado)} \tag{4.48}$$

$$I_{R1} = \frac{V_i - V_A}{R_1} = \frac{20 - 10}{0{,}6\text{ k}\Omega} = 16{,}67\text{ mA} \tag{4.49}$$

(La corriente inversa por el Zener D_1 es $I_{Z1} = I_{R1} - I_{R2} = 16{,}67 - 14{,}285 = 2{,}385\text{ mA} > 0$).

Ejercicio Resuelto: Comparación de los 3 Modelos Lineales del Diodo — Ejercicio 8 Apuntes

Calcular el valor de la tensión de salida V_o en el circuito de la figura ($R_1 = R_2 = R_3 = 5\ \text{k}\Omega$) sabiendo que el diodo D_1 cuando está en conducción se representa por: a) un cortocircuito (modelo 1); b) una fuente de 0,7 V (modelo 2); c) una fuente de 0,7 V y resistencia de 20 Ω (modelo 3).



Solución Paso a Paso:

Comprobamos primero el estado de D_1 suponiendo que está en **OFF**:

$$V_{\text{Ánodo}} = V_o = 6\text{ V}, \qquad V_{\text{Cátodo}} = V_x = 10\frac{R_2}{R_1+R_2} = 5\text{ V} \implies V_D = 6-5 = 1\text{ V} > 0{,}7\text{ V} \implies D_1 \text{ ON} \tag{4.50}$$

a) **Modelo 1 (cortocircuito, $V_\gamma = 0$):** $V_o = V_x$. Por nudos en V_x:

$$\frac{10-V_x}{5} + \frac{6-V_x}{5} = \frac{V_x}{5} \implies 16 = 3V_x \implies V_x = V_o = 5{,}33\text{ V} \tag{4.51}$$

b) **Modelo 2 (fuente de 0,7 V):** $V_o = V_x + 0{,}7$. Aplicando Kirchhoff en el supernudo:

$$\frac{10-V_x}{5} + \frac{6-(V_x+0{,}7)}{5} = \frac{V_x}{5} \implies 3V_x = 15{,}3 \implies V_x = 5{,}1\text{ V} \implies V_o = 5{,}1+0{,}7 = 5{,}8\text{ V} \tag{4.52}$$

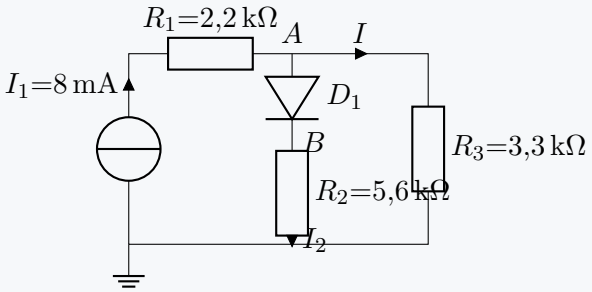
c) **Modelo 3 ($V_\gamma = 0{,}7$ V y $r_d = 20\ \Omega = 0{,}02$ kΩ):** La resistencia total de la rama derecha es $R_3 + r_d = 5{,}02$ kΩ:

$$\frac{10-V_x}{5} + \frac{6-V_x-0{,}7}{5{,}02} = \frac{V_x}{5} \implies 15{,}04V_x = 76{,}7 \implies V_x \approx 5{,}1\text{ V} \tag{4.53}$$

La corriente por el diodo es $I_D = \frac{6-5{,}8}{5{,}02\text{ k}\Omega} \approx 40\ \mu$A, por lo que $V_o = V_x + 0{,}7 + I_D r_d \approx 5{,}8$ V (al ser las resistencias de 5 kΩ mucho mayores que $r_d = 20\ \Omega$, los modelos 2 y 3 dan prácticamente el mismo resultado).

Ejercicio Resuelto: Circuito con Fuente de Corriente y Diodo — Ejercicio 9 Apuntes

Determinar el valor de la corriente I y I_2 en el circuito de la figura suponiendo un diodo rectificador común ($V_\gamma = 0{,}7$ V) con $I_1 = 8$ mA, $R_1 = 2{,}2$ kΩ, $R_2 = 5{,}6$ kΩ y $R_3 = 3{,}3$ kΩ.



Solución Paso a Paso:

Si suponemos D_1 OFF, toda la corriente $I_1 = 8$ mA pasa por R_3, luego $V_A = 8$ mA $\times$ 3,3 kΩ $= 26{,}4$ V $> 0{,}7$ V, por lo que D_1 **conduce en ON**. Sustituyendo D_1 por una fuente de 0,7 V y aplicando LCK en el nudo A:

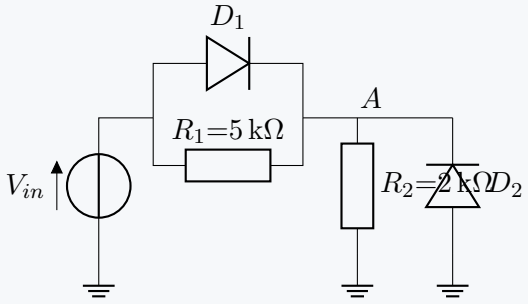
$$8 = \frac{V_A - 0{,}7}{5{,}6} + \frac{V_A}{3{,}3} \implies 147{,}84 = 3{,}3V_A - 2{,}31 + 5{,}6V_A \implies 8{,}9V_A = 150{,}15 \implies V_A = 16{,}87 \text{ V} \tag{4.54}$$

Conocida la tensión V_A, hallamos las corrientes:

$$I = \frac{V_A}{R_3} = \frac{16{,}87 \text{ V}}{3{,}3 \text{ kΩ}} = 5{,}11 \text{ mA}, \qquad I_2 = \frac{V_A - 0{,}7}{R_2} = \frac{16{,}87 - 0{,}7}{5{,}6 \text{ kΩ}} = 2{,}89 \text{ mA} > 0 \tag{4.55}$$

Ejercicio Resuelto: Análisis con el 3.er Modelo Lineal para Dos Diodos — Ejercicio 10 Apuntes

En el circuito de la figura, D_1 y D_2 se representan en conducción mediante una fuente de 0,7 V en serie con $r_d = 20\ \Omega = 0{,}02$ kΩ ($R_1 = 5$ kΩ, $R_2 = 2$ kΩ). Determinar la tensión en el nudo A si: a) $V_{in} = 10$ V; b) $V_{in} = -5$ V.



Solución Paso a Paso:

Si ambos diodos están en OFF, el divisor de tensión da $V_A = \frac{R_2}{R_1+R_2} V_{in} = \frac{2}{7} V_{in}$.

a) **Cuando $V_{in} = 10$ V:** Con ambos OFF sería $V_A = \frac{20}{7} = 2{,}86$ V, luego $V_{D1} = 10 - 2{,}86 = 7{,}14$ V $> 0{,}7$ V y $V_{D2} = -2{,}86$ V $< 0{,}7$ V. Por tanto, D_1 **ON y** D_2 **OFF**. Aplicando Kirchhoff en el nudo A:

$$\frac{10 - 0{,}7 - V_A}{0{,}02} + \frac{10 - V_A}{5} = \frac{V_A}{2} \implies V_A = 9{,}211 \text{ V} \tag{4.56}$$

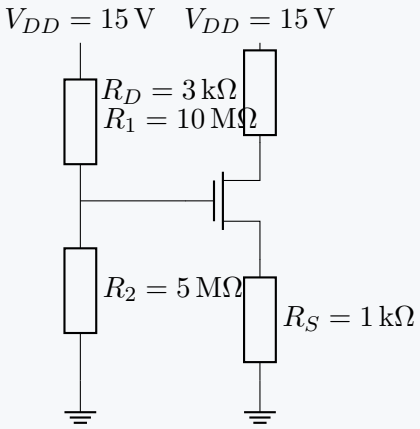
b) **Cuando $V_{in} = -5$ V:** Con ambos OFF sería $V_A = -\frac{10}{7} = -1{,}43$ V, luego $V_{D2} = 0-(-1{,}43) = 1{,}43\text{ V} > 0{,}7\text{ V}$ y $V_{D1} < 0$. Ahora D_2 **ON y** D_1 **OFF**:

$$\frac{-0{,}7 - V_A}{0{,}02} = \frac{V_A - (-5)}{5} + \frac{V_A}{2} \implies V_A = -0{,}71\text{ V} \tag{4.57}$$

con corrientes $I_{R1} = \frac{-0{,}71-(-5)}{5} = 0{,}858$ mA, $I_{R2} = \frac{0{,}71}{2} = 0{,}355$ mA e $I_{D2} = 0{,}858 - 0{,}355 = 0{,}503\text{ mA} > 0$.

Ejercicio Resuelto: Punto de Trabajo Q de Transistor NMOS con Divisor de Puerta — Examen UGR

Determinar el punto de reposo $Q(V_{GS}, I_D, V_{DS})$ y verificar la región de operación en el circuito de polarización de la figura, con $V_{DD} = 15$ V, $V_T = 1{,}5$ V, $k_n = 1\text{ mA/V}^2$, $R_1 = 10\text{ M}\Omega$, $R_2 = 5\text{ M}\Omega$, $R_D = 3\text{ k}\Omega$ y $R_S = 1\text{ k}\Omega$. (A continuación se incluye también la variante de clase con $R_1 = 150\text{ k}\Omega, R_2 = 100\text{ k}\Omega, R_D = 40\text{ k}\Omega, R_S = 5\text{ k}\Omega, k_n = 40\ \mu\text{A/V}^2$ y $V_T = 2$ V).



Solución Paso a Paso:

1) **Tensión en la Puerta ($I_G = 0$):**

$$V_G = V_{DD}\frac{R_2}{R_1 + R_2} = 15 \times \frac{5}{10+5} = 5\text{ V} \tag{4.58}$$

Si el transistor estuviese en corte ($I_D = 0 \implies V_S = 0$), sería $V_{GS} = 5\text{ V} > V_T = 1{,}5$ V, luego **el NMOS conduce (ON)**.

2) **Hipótesis de Saturación y Ecuaciones de Malla ($I_D = I_S$):**

$$V_{GS} = V_G - I_D R_S = 5 - 1\cdot I_D, \qquad I_D = \frac{k_n}{2}(V_{GS} - V_T)^2 = 0{,}5(3{,}5 - I_D)^2 \tag{4.59}$$

$$I_D^2 - 9I_D + 12{,}25 = 0 \implies I_D = \frac{9 - \sqrt{32}}{2} \approx 1{,}67\text{ mA}, \qquad V_{GS} = 5 - 1{,}67 = 3{,}33\text{ V} > 1{,}5\text{ V} \tag{4.60}$$

(La otra raíz $I_D = 7{,}33$ mA daría $V_{GS} = -2{,}33\text{ V} < V_T$, imposible).

3) **Cálculo de V_{DS} y Comprobación de Saturación:**

$$V_{DS} = V_{DD} - I_D(R_D + R_S) = 15 - 1{,}67\times(3+1) = 8{,}32\text{ V} \geq V_{GS} - V_T = 1{,}83\text{ V} \quad \text{(Saturación OK)} \tag{4.61}$$

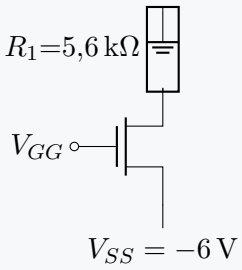
Variante del Ejemplo de Clase ('orig-087.png'): Con $R_1 = 150\ \text{k}\Omega, R_2 = 100\ \text{k}\Omega, R_D = 40\ \text{k}\Omega, R_S = 5\ \text{k}\Omega, k_n = 40 \times 10^{-6}\ \text{A/V}^2$ y $V_T = 2\ \text{V}$:

$$V_G = 15\frac{100}{250} = 6\ \text{V}, \qquad \frac{6 - V_{GS}}{5\ \text{k}\Omega} = 20 \times 10^{-6}(V_{GS} - 2)^2 \implies V_{GS}^2 + 6V_{GS} - 56 = 0 \tag{4.62}$$

De donde $V_{GS} = 5{,}06\ \text{V} > 2\ \text{V}$, $I_D = \frac{6-5{,}06}{5\ \text{k}\Omega} = 0{,}188\ \text{mA}$ (o 0,1844 mA según redondeo) y $V_{DS} = 15 - I_D(45\ \text{k}\Omega) = 6{,}54\ \text{V} > V_{GS} - V_T = 3{,}06\ \text{V}$ (**Saturación correcta**).

Ejercicio Resuelto: Punto de Trabajo en las 3 Regiones según V_{GG} — Ejercicio 12 Apuntes

Hallar el punto de trabajo del MOSFET de canal N de la figura ($V_{SS} = -6\ \text{V}$, $R_1 = 5{,}6\ \text{k}\Omega$ conectada entre masa 0 V y drenador, $V_T = 2\ \text{V}$, $k_n = 2 \times 10^{-3}\ \text{A/V}^2 = 2\ \text{mA/V}^2$) para: a) $V_{GG} = -3{,}5\ \text{V}$; b) $V_{GG} = -3\ \text{V}$; c) $V_{GG} = -4\ \text{V}$.



Solución Paso a Paso:

Como la fuente está fija a $V_S = V_{SS} = -6\ \text{V}$, tenemos siempre $V_{GS} = V_{GG} - (-6) = V_{GG} + 6$.

a) **Si $V_{GG} = -3{,}5\ \text{V}$:** $V_{GS} = -3{,}5 + 6 = 2{,}5\ \text{V} > V_T = 2\ \text{V} \implies$ NMOS ON. Suponemos **saturación**:

$$I_D = \frac{k_n}{2}(V_{GS} - V_T)^2 = \frac{2}{2}(2{,}5 - 2)^2 = 0{,}25\ \text{mA} \tag{4.63}$$

Como $0 - V_D = I_D R_1 \implies V_D = -0{,}25 \times 5{,}6 = -1{,}4\ \text{V}$, resulta:

$$V_{DS} = V_D - V_{SS} = -1{,}4 - (-6) = 4{,}6\ \text{V} > V_{GS} - V_T = 0{,}5\ \text{V} \implies \textbf{Saturación OK} \tag{4.64}$$

b) **Si $V_{GG} = -3\ \text{V}$:** $V_{GS} = -3 + 6 = 3\ \text{V} > V_T = 2\ \text{V} \implies$ NMOS ON. Si suponemos saturación:

$$I_D = \frac{2}{2}(3-2)^2 = 1\ \text{mA} \implies V_D = -1 \times 5{,}6 = -5{,}6\ \text{V} \implies V_{DS} = -5{,}6 - (-6) = 0{,}4\ \text{V} \tag{4.65}$$

Como $V_{DS} = 0{,}4\ \text{V} < V_{GS} - V_T = 1\ \text{V}$, **NO está en saturación**, sino en la **región lineal (tríodo)**. Planteamos las ecuaciones en región lineal ($V_D = V_{SS} + V_{DS} = -6 + V_{DS}$):

$$I_D = \frac{-V_{SS} - V_{DS}}{R_1} = k_n\left[(V_{GS} - V_T)V_{DS} - \frac{1}{2}V_{DS}^2\right] \implies \frac{6 - V_{DS}}{5{,}6} = 2\left(1 \cdot V_{DS} - \frac{1}{2}V_{DS}^2\right) \tag{4.66}$$

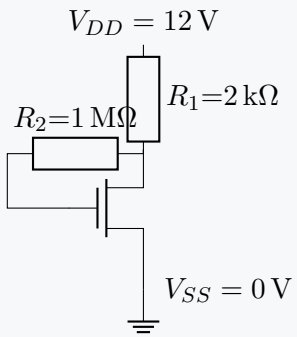
Resolviendo la ecuación de segundo grado se obtienen dos raíces: $V_{DS} = 1{,}43$ V (se descarta porque es mayor que $V_{GS} - V_T = 1$ V) y la solución válida:

$$V_{DS} = 0{,}75\,\text{V} < 1\,\text{V}, \qquad I_D = \frac{6 - 0{,}75}{5{,}6} = 0{,}93\,\text{mA}, \qquad V_D = -6{+}0{,}75 = -5{,}25\,\text{V} \tag{4.67}$$

c) **Si $V_{GG} = -4$ V:** $V_{GS} = -4 - (-6) = 2\,\text{V} = V_T \implies I_D = 0$ mA (el transistor está en el umbral de **OFF / Corte**, con $V_D = 0$ V y $V_{DS} = 6$ V).

Ejercicio Resuelto: MOSFET con Puerta y Drenador Cortocircuitados — Ejercicio 13 Apuntes

Determinar el valor de I_D, V_{DS} y V_{GS} en el circuito de la figura, sabiendo que $V_{DD} = 12$ V, $V_{SS} = 0$ V, $R_1 = 2$ kΩ, $R_2 = 1$ MΩ, $V_T = 3$ V y $k_n = 0{,}48 \times 10^{-3}$ A/V^2 = 0,48 mA/V^2.



Solución Paso a Paso:

1) **¿Conduce el transistor?** Como la corriente de puerta es siempre nula ($I_G = 0 \implies I_{R2} = 0$), no cae tensión en R_2, lo que obliga a que $V_G = V_D$ y por tanto $V_{GS} = V_{DS}$. Si supusiéramos el transistor en OFF ($I_D = 0$), sería $V_D = V_{DD} = 12\,\text{V} \implies V_{GS} = 12\,\text{V} > V_T = 3\,\text{V}$, contradicción: el transistor está **ON**.

2) **¿En qué región conduce?** Al tener unidos drenador y puerta ($V_{DS} = V_{GS}$), se cumple siempre que $V_{DS} > V_{GS} - V_T$ (pues $V_T = 3\,\text{V} > 0$). Por tanto, **trabaja obligatoriamente en SATURACIÓN**. Igualando la corriente del transistor con la que baja por R_1:

$$I_D = \frac{k_n}{2}(V_{GS} - V_T)^2 = \frac{V_{DD} - V_{DS}}{R_1} \implies \frac{0{,}48}{2}(V_{GS} - 3)^2 = \frac{12 - V_{GS}}{2} \tag{4.68}$$

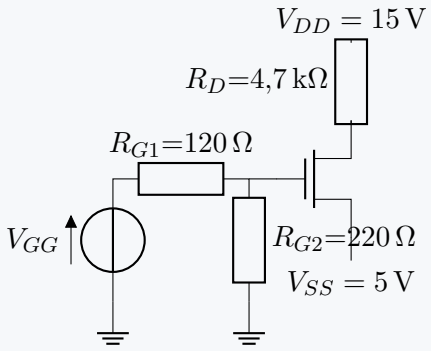
Despejando la raíz positiva ($V_{GS} > 3$ V):

$$V_{GS} = V_{DS} = 6{,}43\,\text{V}, \qquad I_D = \frac{12 - 6{,}43}{2\,\text{k}\Omega} = 2{,}785\,\text{mA} \tag{4.69}$$

Ejercicio Resuelto: Umbral de Conducción de un MOSFET — Ejercicio 14 Apuntes

En el circuito de la figura ($V_{DD} = 15$ V, $V_{SS} = 5$ V, $R_{G1} = 120\,\Omega$, $R_{G2} = 220\,\Omega$, $R_D = 4{,}7$ kΩ, $V_T = 2$ V, $k_n = 2$ mA/V^2): a) Si $V_{GG} = 0$ V, ¿cuál es el estado del transistor? b) Si V_{GG} aumenta desde 0, ¿para qué tensión empieza a conducir? c) En el instante

en que entra en conducción, ¿en qué región de trabajo se encuentra?



Solución Paso a Paso:

a) **Para $V_{GG} = 0$ V:** $V_G = 0$ V y $V_S = V_{SS} = 5$ V $\implies V_{GS} = 0 - 5 = -5$ V $< V_T = 2$ V $\implies$ **NMOS OFF (en corte)**.

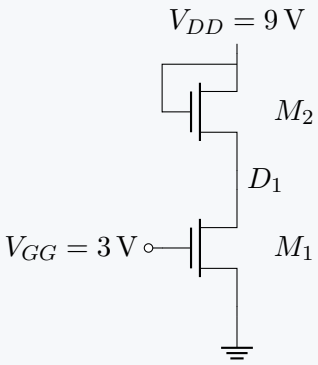
b) **Tensión V_{GG} para empezar a conducir:** El transistor empieza a conducir cuando $V_{GS} = V_T = 2$ V, lo que exige en la puerta un potencial $V_G = V_S + V_T = 5 + 2 = 7$ V. Como $I_G = 0$, aplicamos el divisor de tensión entre R_{G1} y R_{G2}:

$$\frac{V_{GG} - 7}{120} = \frac{7}{220} \implies V_{GG} = \frac{7 \times 120}{220} + 7 = 10{,}82\,\text{V} \quad (\text{conduce para } V_{GG} > 10{,}82\,\text{V}) \tag{4.70}$$

c) **Región al inicio de la conducción:** Justo cuando empieza a conducir ($V_G = 7{,}01$ V, $V_{GS} - V_T \to 0^+$), la corriente I_D es pequeñísima ($I_D \approx 0$), por lo que la caída en R_D es casi nula y $V_D \approx 15$ V. Así, $V_{DS} \approx 15 - 5 = 10\,\text{V} \gg V_{GS} - V_T \approx 0\,\text{V}$, luego entra directamente en **SATURACIÓN**.

Ejercicio Resuelto: Dos Transistores NMOS en Serie y Límite Lineal-Saturación — Ejercicio 15 Apuntes

En el circuito de la figura ($V_{DD} = 9$ V; M_1: $V_{T1} = 1$ V, $k_1 = 4$ mA/V^2; M_2: $V_{T2} = 2$ V, $k_2 = 2$ mA/V^2): a) Hallar el punto de trabajo y la potencia disipada en cada transistor si $V_{GG} = 3$ V. b) Calcular la tensión V_{GG} máxima para que M_1 se mantenga en la región de saturación (límite lineal-saturación).



Solución Paso a Paso:

a) **Punto de trabajo y potencias para $V_{GG} = 3$ V:** El transistor M_2 tiene su puerta conectada a su drenador ($V_{G2} = V_{D2} = 9$ V), luego conduce en **saturación**. Para M_1, $V_{GS1} = 3\text{ V} > V_{T1} = 1\text{ V}$ (ON). Suponemos que M_1 también está en **saturación** e igualamos $I_{D1} = I_{D2}$ (teniendo en cuenta que $V_{S2} = V_{D1}$):

$$\frac{k_1}{2}(V_{GS1} - V_{T1})^2 = \frac{k_2}{2}(V_{GS2} - V_{T2})^2 \implies \frac{4}{2}(3-1)^2 = \frac{2}{2}(9 - V_{D1} - 2)^2 \quad (4.71)$$

$$8 = (7 - V_{D1})^2 \implies V_{D1}^2 - 14V_{D1} + 41 = 0 \implies V_{D1} = \frac{14 \pm \sqrt{32}}{2} = \begin{cases} 9{,}83\text{ V} & \text{(NO, supera 9 V)} \\ 4{,}17\text{ V} & \text{(SÍ)} \end{cases} \quad (4.72)$$

Comprobamos la saturación de M_1: $V_{DS1} = V_{D1} = 4{,}17\text{ V} > V_{GS1} - V_{T1} = 3 - 1 = 2$ V (**Saturación OK**). La corriente común es $I_D = 8$ mA, con $V_{DS1} = 4{,}17$ V y $V_{DS2} = 9 - 4{,}17 = 4{,}83$ V. Las potencias disipadas son:

$$P_{M1} = I_D \cdot V_{DS1} = 8 \times 4{,}17 = 33{,}36\text{ mW}, \qquad P_{M2} = I_D \cdot V_{DS2} = 8 \times 4{,}83 = 38{,}64\text{ mW} \quad (4.73)$$

b) **Frontera entre saturación y región lineal de M_1:** El límite exacto ocurre cuando $V_{DS1} = V_{D1} = V_{GG} - V_{T1} = V_{GG} - 1$. Igualando de nuevo las corrientes $I_{D1} = I_{D2}$ en ese punto frontera:

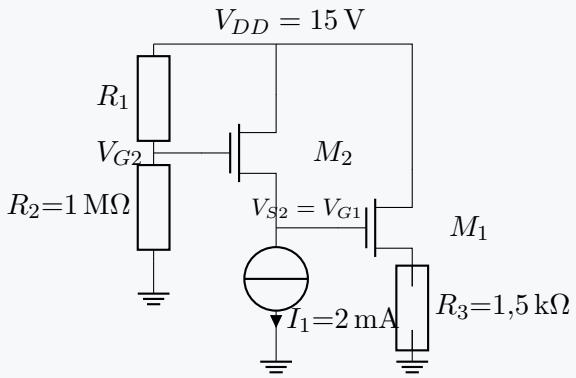
$$\frac{4}{2}(V_{GG} - 1)^2 = \frac{2}{2}\left(9 - (V_{GG} - 1) - 2\right)^2 \implies 2(V_{GG} - 1)^2 = (8 - V_{GG})^2 \quad (4.74)$$

$$V_{GG}^2 + 12V_{GG} - 62 = 0 \implies V_{GG} = \frac{-12 + \sqrt{392}}{2} = 3{,}9\text{ V} \quad (4.75)$$

(Para $V_{GG} < 3{,}9$ V, M_1 opera en saturación; para $V_{GG} > 3{,}9$ V, M_1 opera en la región lineal).

Ejercicio Resuelto: Diseño de Polarización de Dos NMOS Idénticos — Ejercicio 17 Apuntes

Los dos transistores NMOS del circuito de la figura son idénticos ($V_T = 0{,}6$ V, $k_n = 4\text{ mA/V}^2$, $V_{DD} = 15$ V, $R_2 = 1\text{ M}\Omega$, $R_3 = 1{,}5\text{ k}\Omega$). Se desea que la corriente de drenador sea igual en ambos: $I_1 = I_2 = 2$ mA. Calcular V_{GS} para M_1 y M_2, el valor de R_1 y justificar la zona de trabajo de ambos transistores.



Solución Paso a Paso:

1) **Análisis de M_1:** La tensión en la fuente de M_1 es $V_{S1} = I_2 R_3 = 2\text{ mA} \times 1{,}5\text{ k}\Omega = 3$ V. Como su drenador está conectado directamente a $V_{DD} = 15$ V, tenemos $V_{DS1} = 15 - 3 = 12$ V, que es muy grande, luego M_1 **trabaja en saturación**:

$$I_2 = \frac{k_n}{2}(V_{GS1} - V_T)^2 \implies 2 = \frac{4}{2}(V_{GS1} - 0{,}6)^2 \implies V_{GS1} - 0{,}6 = 1 \implies V_{GS1} = 1{,}6\text{ V} \tag{4.76}$$

(Comprobación: $V_{DS1} = 12$ V $> V_{GS1} - V_T = 1$ V, saturación verificada). De aquí obtenemos la tensión en la puerta de M_1 (que es también la fuente de M_2):

$$V_{G1} = V_{S2} = V_{S1} + V_{GS1} = 3 + 1{,}6 = 4{,}6\text{ V} \tag{4.77}$$

2) **Análisis de M_2 y cálculo de R_1:** Como ambos transistores son idénticos y queremos la misma corriente $I_1 = I_2 = 2$ mA en saturación, debe cumplirse que:

$$V_{GS2} = V_{GS1} = 1{,}6\text{ V} \implies V_{G2} = V_{S2} + V_{GS2} = 4{,}6 + 1{,}6 = 6{,}2\text{ V} \tag{4.78}$$

Comprobamos la saturación de M_2: $V_{DS2} = V_{DD} - V_{S2} = 15 - 4{,}6 = 10{,}4$ V $> V_{GS2} - V_T = 1$ V (**Saturación de M_2 OK**). Finalmente, como $I_{G2} = 0$, la corriente por R_1 y R_2 es la misma:

$$I_{R1} = I_{R2} = \frac{V_{G2}}{R_2} = \frac{6{,}2\text{ V}}{1\text{ M}\Omega} = 6{,}2\,\mu\text{A} \implies R_1 = \frac{V_{DD} - V_{G2}}{I_{R1}} = \frac{15 - 6{,}2}{6{,}2\,\mu\text{A}} = 1{,}42\text{ M}\Omega \tag{4.79}$$

Tema 5

Fundamentos de Electrónica Digital y Lógica CMOS

Metadatos del Tema y Fuentes:

Asignatura: Fundamentos Físicos y Tecnológicos (1.º Grado en Ingeniería Informática, UGR).

Profesor: Pedro Cartujo (Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores).

Bibliografía de Referencia: Rabaey, J. M., Chandrakasan, A., Nikolic, B., *Digital Integrated Circuits: A Design Perspective*, Prentice Hall; Wakerly, J. F., *Diseño Digital: Principios y Prácticas*, Pearson.

5.1 Parámetros Característicos de una Familia Lógica

Mientras que en la electrónica analógica las tensiones e intensidades pueden tomar cualquier valor continuo dentro de un rango, en la **electrónica digital** se trabaja con **lógica binaria**, donde las variables solo representan dos estados discretos: **'0' lógico** y **'1' lógico**.

- **Lógica Positiva (convenio estándar):** El estado '1' lógico se asocia al nivel alto de tensión ($V_{\text{alto}} \approx V_{DD}$) y el '0' lógico se asocia al nivel bajo ($V_{\text{bajo}} \approx 0$ V).
- **Lógica Negativa:** El '1' lógico se asocia al nivel bajo de tensión y el '0' lógico al nivel alto.

5.1.1 El Inversor, Niveles de Tensión y Márgenes de Ruido

El circuito digital más elemental es el **inversor (puerta NOT)**, cuya tabla de verdad invierte el bit de entrada ($V_i = 0 \implies V_o = 1$; $V_i = 1 \implies V_o = 0$). La **función o característica de transferencia de tensión (VTC)** representa la tensión de salida V_{out} en función de la tensión de entrada V_{in}:

- En un inversor ideal, la transición entre el nivel alto y el nivel bajo sería un escalón vertical instantáneo a mitad de rango.
- En una puerta lógica práctica real, la transición presenta una pendiente finita negativa; los puntos donde la pendiente vale $\frac{dV_{out}}{dV_{in}} = -1$ delimitan la región de transición e identifican los umbrales de entrada V_{IL} y V_{IH}.

Definición: Niveles de Tensión Normalizados de una Familia Lógica

Para garantizar que una puerta lógica receptora interprete sin errores el estado lógico enviado por una puerta transmisora precedente, toda familia lógica especifica cuatro niveles límite de tensión:

- V_{OH} (*Output High*): Tensión **mínima** garantizada en la salida cuando la puerta entrega un '1' lógico.
- V_{OL} (*Output Low*): Tensión **máxima** garantizada en la salida cuando la puerta entrega un '0' lógico.
- V_{IH} (*Input High*): Tensión **mínima** que debe recibir una entrada para ser interpretada inequívocamente como un '1' lógico.
- V_{IL} (*Input Low*): Tensión **máxima** que puede recibir una entrada para ser interpretada inequívocamente como un '0' lógico.

La franja intermedia $[V_{IL}, V_{IH}]$ constituye la **zona prohibida o de indeterminación**.

Ley / Teorema: Márgenes de Ruido en Nivel Alto y Nivel Bajo

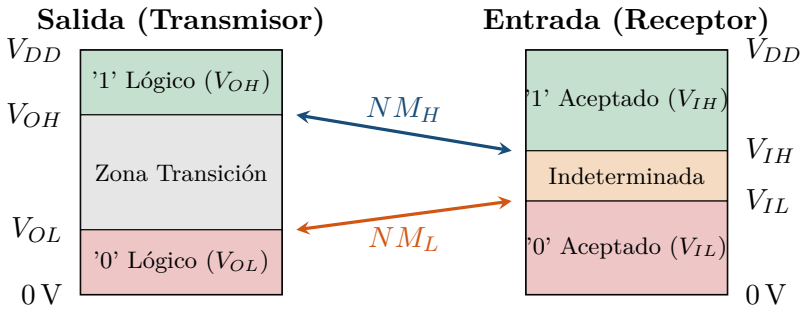
Los **márgenes de ruido** cuantifican la máxima amplitud de perturbación o ruido electromagnético que puede sumarse o restarse a la señal en el cable entre dos puertas sin provocar un error lógico en el receptor:

$$NM_H = V_{OH} - V_{IH} \quad \text{(Margen de Ruido Alto, } \textit{Noise Margin High}\text{)} \tag{5.1}$$

$$NM_L = V_{IL} - V_{OL} \quad \text{(Margen de Ruido Bajo, } \textit{Noise Margin Low}\text{)} \tag{5.2}$$

Para que una familia lógica sea funcional debe cumplirse estrictamente que $V_{OH} > V_{IH}$ ($NM_H > 0$) y $V_{IL} > V_{OL}$ ($NM_L > 0$). El margen de ruido global de la familia es el caso peor:

$$NM = \min(NM_H, NM_L) \tag{5.3}$$



5.1.2 Fan-In, Fan-Out, Tiempos de Retardo y Disipación de Potencia

- **Fan-In (Abanico de Entrada):** Número de entradas que posee una misma puerta lógica (por ejemplo, una puerta NAND de 3 entradas tiene Fan-In = 3).
- **Fan-Out o Factor de Carga (Abanico de Salida):** Número máximo de entradas de puertas de la misma familia que se pueden conectar simultáneamente a la salida de una puerta sin que se estropee su funcionamiento ni los niveles lógicos salgan de los márgenes

garantizados:

$$FO = \text{mín}\left(\left\lfloor \frac{|I_{OH}|}{|I_{IH}|} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{|I_{OL}|}{|I_{IL}|} \right\rfloor\right) \tag{5.4}$$

donde I_{OH}, I_{OL} son las corrientes máximas que la salida puede suministrar o absorber en estado alto y bajo, e I_{IH}, I_{IL} las corrientes requeridas por cada entrada conectada. En tecnologías MOS/CMOS, al ser $I_G = 0$, el *fan-out* estático en continua es teóricamente infinito, quedando limitado en alta frecuencia por la suma de capacidades de entrada ($C_L = N \cdot C_{in}$) que ralentizan las conmutaciones.

- **Tiempos de Retardo de Propagación (t_d o t_p):** Toda puerta lógica real presenta un retardo temporal entre el cambio en la entrada y la respuesta en la salida (medido entre los puntos del 50 % de excursión de ambas señales):
  - t_{pHL}: tiempo de propagación cuando la salida pasa de nivel alto a bajo (*High-to-Low*).
  - t_{pLH}: tiempo de propagación cuando la salida pasa de nivel bajo a alto (*Low-to-High*).
  - **Retardo de propagación medio** (interesa que sea lo más pequeño posible):

$$t_d = t_p = \frac{t_{pHL} + t_{pLH}}{2} \tag{5.5}$$

- **Disipación de Potencia Estática y Dinámica y Producto Retardo-Potencia:**

  a) **Potencia Estática (P_{est}):** Potencia consumida cuando la puerta permanece en un estado lógico fijo sin conmutar. En lógica NMOS con carga resistiva o activa es elevada (cuando la salida vale '0' circula corriente continua de V_{DD} a masa), mientras que **en lógica CMOS estática es prácticamente nula** ($P_{\text{est}} = V_{DD} I_{\text{fuga}} \approx 0$).

  b) **Potencia Dinámica (P_D):** Potencia consumida al cargar y descargar la capacidad de carga equivalente C_L a una frecuencia de conmutación f:

$$P_D = C_L \cdot V_{DD}^2 \cdot f \tag{5.6}$$

  c) **Producto Retardo-Potencia (PDP):** Figura de mérito energética que mide la energía consumida por cada transición lógica:

$$PDP = P \cdot t_p \quad [\text{J o pJ}] \tag{5.7}$$

5.2 Puertas Lógicas con Transistores MOSFET: Lógica NMOS y Lógica CMOS

5.2.1 El Transistor MOS como Interruptor Controlado

En electrónica digital, los transistores MOSFET de enriquecimiento se utilizan como **interruptores controlados por la tensión de puerta**:

- **Transistor NMOS (conduce con '1', corta con '0'):**
  - Si la entrada en la puerta es un **'0' lógico** ($V_G = 0$ V $\implies V_{GS} < V_{Tn}$): el NMOS está en **CORTE (OFF)**, comportándose como un **interruptor abierto**.
  - Si la entrada en la puerta es un **'1' lógico** ($V_G = V_{DD} \implies V_{GS} > V_{Tn}$): el NMOS **CONDUCE (ON)**, comportándose como un **interruptor cerrado** que descarga la salida a masa (transmite perfectamente el '0' lógico).
- **Transistor PMOS (conduce con '0', corta con '1'):**

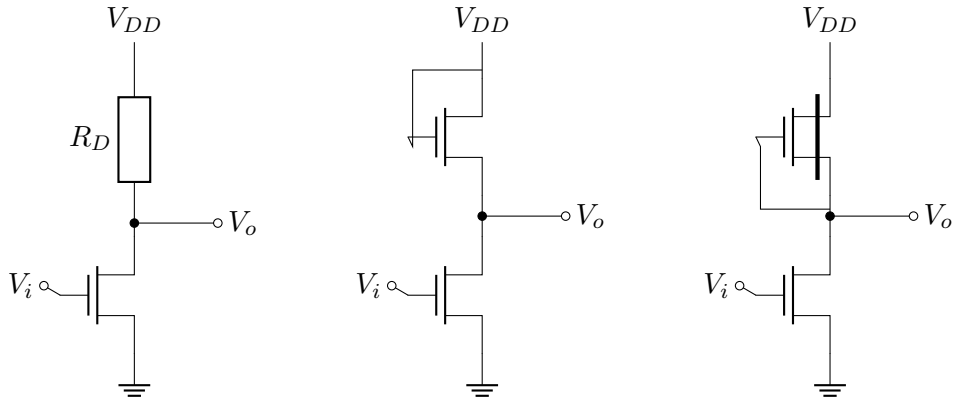
- Si la entrada en la puerta es un **'0' lógico** ($V_G = 0$ V $\implies V_{SG} = V_{DD} > |V_{Tp}|$): el PMOS **CONDUCE (ON)**, comportándose como un **interruptor cerrado** que conecta la salida a V_{DD} (transmite perfectamente el '1' lógico).
- Si la entrada en la puerta es un **'1' lógico** ($V_G = V_{DD} \implies V_{SG} = 0 < |V_{Tp}|$): el PMOS está en **CORTE (OFF)**, comportándose como un **interruptor abierto**.

5.2.2 Inversor y Puertas en Lógica NMOS (con Carga Pasiva o Activa)

En la familia lógica **NMOS**, la red inferior de conmutación está formada por transistores NMOS de enriquecimiento y en la parte superior se coloca una **carga** conectada a V_{DD}. Como se estudia en los apuntes de clase, dicha carga de *pull-up* puede ser de tres tipos:

1. **Una resistencia pasiva (R_D):** Fácil de analizar, pero ocupa mucha área en un chip integrado.
2. **Un transistor NMOS de enriquecimiento como carga activa:** Con su puerta conectada a su propio drenador ($V_G = V_D = V_{DD}$), por lo que trabaja permanentemente en saturación cuando conduce.
3. **Un transistor NMOS de deplexión como carga activa:** Con su puerta conectada a su fuente ($V_{GS} = 0 > V_{Td} < 0$), por lo que tiene canal permanentemente formado.

1. Carga Resistiva (R_D) **2. Carga NMOS Enriq.** **3. Carga NMOS Deplex.**



Cálculo de V_{OH} y V_{OL} en el Inversor NMOS con resistencia de pull-up R_D:

- **Entrada a nivel bajo ($V_i = 0$ V $\equiv$ '0'):** El transistor NMOS inferior está en corte ($I_D = 0$). No cae tensión en la resistencia de carga R_D, por lo que la salida sube exactamente a:

$$V_{OH} = V_{DD} \equiv \text{'1' lógico} \tag{5.8}$$

- **Entrada a nivel alto ($V_i = V_{DD} \equiv$ '1'):** El NMOS inferior conduce con $V_{GS} = V_{DD} > V_{Tn}$. Como la salida cae a un valor bajo $V_o = V_{OL} < V_{DD} - V_{Tn}$, el transistor trabaja en la **región óhmica (lineal)**. Igualando la corriente que baja por R_D con la corriente del NMOS en zona lineal:

$$\frac{V_{DD} - V_{OL}}{R_D} = k_n \left[(V_{DD} - V_{Tn}) V_{OL} - \frac{1}{2} V_{OL}^2 \right] \tag{5.9}$$

Para que V_{OL} sea cercano a 0 V se requiere que $k_n R_D \gg 1$, pero siempre resulta $V_{OL} > 0$ V y existe un consumo constante de potencia estática $P = \frac{V_{DD}(V_{DD} - V_{OL})}{R_D}$ mientras la salida está en '0'.

5.2.3 El Inversor Estático CMOS: Estructura, Tabla de Verdad y VTC

La tecnología **CMOS** (*Complementary MOS*) elimina el consumo de potencia estática uniendo un transistor **PMOS** en la parte superior (entre V_{DD} y la salida) y un transistor **NMOS** en la parte inferior (entre la salida y masa), con ambas puertas conectadas a la entrada común V_{in}.

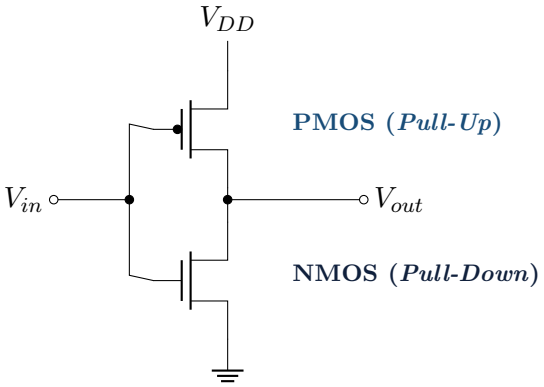
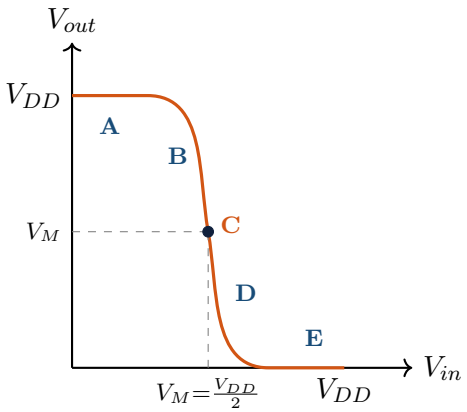


Tabla de verdad física y funcionamiento del Inversor CMOS:

Entrada V_{in}	**Estado PMOS**	**Estado NMOS**	**Salida** V_{out}	**Consumo Estático**
$'0'$ (0 V)	**ON** (Lineal)	**OFF** (Corte)	$V_{OH} = V_{DD}$ $('1')$	$I_{DD} = 0 \implies P_{\text{est}} = 0$
$'1'$ (V_{DD})	**OFF** (Corte)	**ON** (Lineal)	$V_{OL} = 0$ V $('0')$	$I_{DD} = 0 \implies P_{\text{est}} = 0$

Curva de Transferencia de Tensión (VTC) y sus 5 Regiones: Al variar V_{in} desde 0 V hasta V_{DD}, el inversor CMOS recorre cinco regiones de operación:

1. **Región A** ($0 \leq V_{in} < V_{Tn}$)**:** NMOS en corte (OFF) y PMOS en región lineal $\implies V_{out} = V_{DD}$.
2. **Región B** ($V_{Tn} \leq V_{in} < V_M$)**:** NMOS entra en saturación y PMOS sigue en región lineal.
3. **Región C** ($V_{in} = V_M \approx \frac{V_{DD}}{2}$)**: Ambos transistores están en saturación**, originando una caída casi vertical entre '1' y '0'.
4. **Región D** ($V_M < V_{in} \leq V_{DD} - |V_{Tp}|$)**:** NMOS en región lineal y PMOS en saturación.
5. **Región E** ($V_{in} > V_{DD} - |V_{Tp}|$)**:** PMOS en corte (OFF) y NMOS en región lineal $\implies V_{out} = 0$ V.



5.3 Puertas CMOS Combinacionales: NOR, NAND y Síntesis Sistemática

Ley / Teorema: Regla Fundamental de Diseño de Puertas Lógicas CMOS

Toda puerta CMOS estática consta de una **red inferior de Pull-Down (PDN, transistores NMOS)** entre la salida y masa, y una **red superior dual de Pull-Up (PUN, transistores PMOS)** entre V_{DD} y la salida:

- **SUMA LÓGICA (OR, +):** Se implementa con **NMOS en PARALELO** abajo y **PMOS en SERIE** arriba.
- **MULTIPLICACIÓN LÓGICA (AND, ·):** Se implementa con **NMOS en SERIE** abajo y **PMOS en PARALELO** arriba.
- **Funciones NO negadas:** Como una etapa CMOS o NMOS simple invierte siempre la función de su red inferior ($V_o = \overline{F}$), si el problema pide una función positiva sin negar, p. ej. $Y = A \cdot B + C$, primero sintetizamos la función negada $\overline{Y} = \overline{A \cdot B + C}$ y a su salida conectamos un **inversor** para obtener $Y = \overline{\overline{Y}}$.

5.3.1 Puertas Básicas de 2 Entradas: NOR y NAND en CMOS

1. Puerta NOR CMOS ($V_o = \overline{A + B}$):

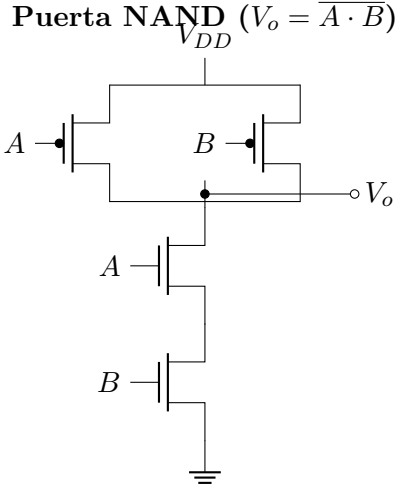
- **PUN (arriba):** Dos PMOS (M_1, M_2) en **serie**.
- **PDN (abajo):** Dos NMOS (M_3, M_4) en **paralelo**.

2. Puerta NAND CMOS ($V_o = \overline{A \cdot B}$):

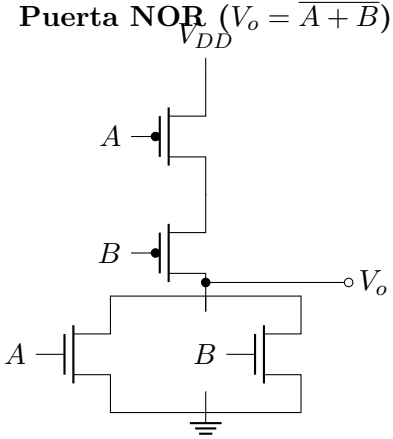
- **PUN (arriba):** Dos PMOS (M_1, M_2) en **paralelo**.
- **PDN (abajo):** Dos NMOS (M_3, M_4) en **serie**.

A	B	M_1	M_2	M_3	M_4	$V_o = \overline{A+B}$	A	B	M_1	M_2	M_3	M_4	$V_o = \overline{A \cdot B}$
0	0	ON	ON	OFF	OFF	**1**	0	0	ON	ON	OFF	OFF	**1**
0	1	ON	OFF	OFF	ON	**0**	0	1	ON	OFF	OFF	ON	**1**
1	0	OFF	ON	ON	OFF	**0**	1	0	OFF	ON	ON	OFF	**1**
1	1	OFF	OFF	ON	ON	**0**	1	1	OFF	OFF	ON	ON	**0**

Puerta NAND ($V_o = \overline{A \cdot B}$)



Puerta NOR ($V_o = \overline{A + B}$)



5.4 Ejercicios Resueltos de Exámenes de Electrónica Digital

Ejercicio Resuelto: Síntesis de $Y = A \cdot B + C$ en Lógica NMOS y en Lógica CMOS — Ejemplo de Clase

Diseñar a nivel de transistores la función booleana no negada:

$$Y = A \cdot B + C \tag{5.10}$$

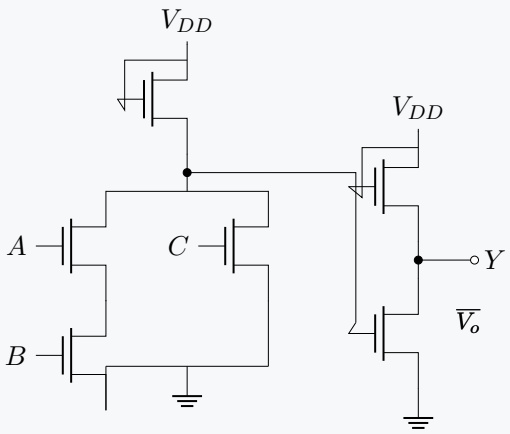
a) Empleando lógica NMOS con carga NMOS de enriquecimiento. b) Empleando lógica CMOS estática complementaria.

Solución Paso a Paso:

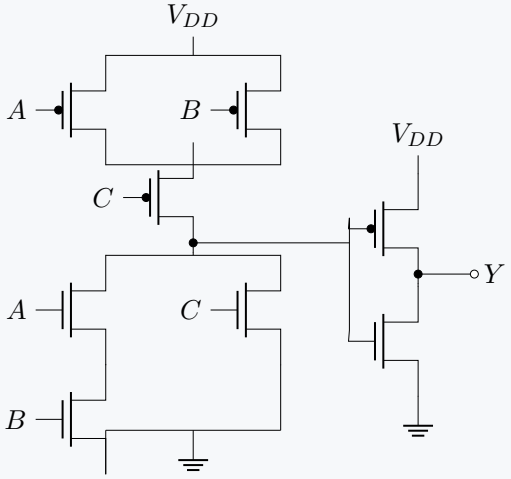
Como la función pedida $Y = A \cdot B + C$ no tiene barra de negación superior, realizamos en una primera etapa la función invertida $\overline{V_o} = \overline{A \cdot B + C}$ y le encadenamos en cascada un **inversor** en la salida:

- **Red PDN (NMOS):** El producto $A \cdot B$ corresponde a dos NMOS (N_A, N_B) en **serie**, y la suma $+C$ coloca dicho brazo en **paralelo** con el transistor N_C.
- **Red PUN en CMOS (PMOS):** Por dualidad, P_A y P_B van en **paralelo**, y el conjunto va en **serie** con P_C.

a) En Lógica NMOS con Carga Activa



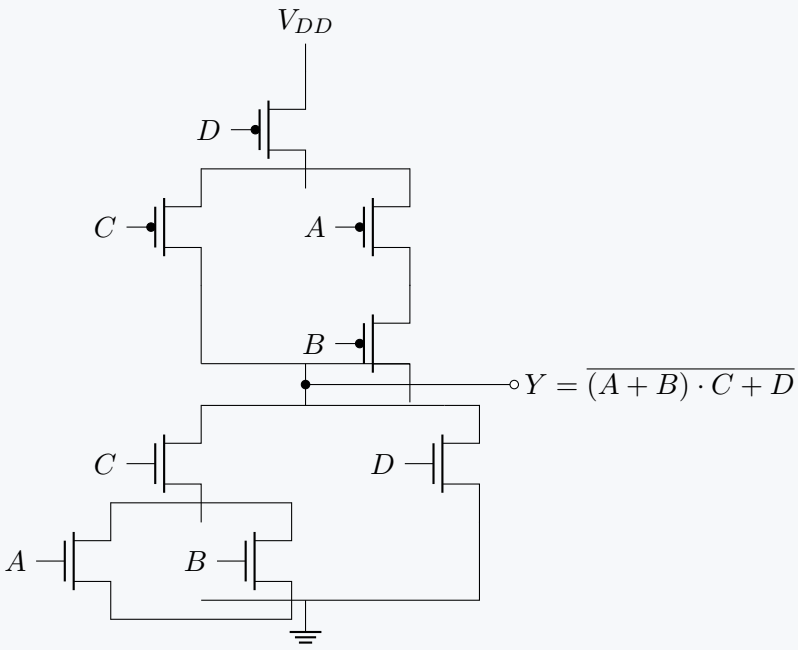
b) En Lógica CMOS Complementaria



Ejercicio Resuelto: Síntesis de Puerta CMOS de 8 Transistores: $Y = \overline{(A+B) \cdot C + D}$

Diseñar a nivel de transistores la puerta estática complementaria CMOS que implementa directamente la función booleana negada:

$$Y = \overline{(A + B) \cdot C + D} \tag{5.11}$$



Justificación Topológica:
- **Red PDN (4 NMOS):** $N_A \parallel N_B$ (suma $A+B$) en serie con N_C (producto por C), y todo ello en paralelo con N_D (suma $+D$).
- **Red PUN (4 PMOS):** P_A en serie con P_B, este bloque en paralelo con P_C, y el conjunto en serie con P_D hacia V_{DD}. Total: **8 transistores**.

Ejercicio Resuelto: Síntesis de $Y = A \cdot B + C \cdot (D + E)$ — Examen Enero 2020 FFT

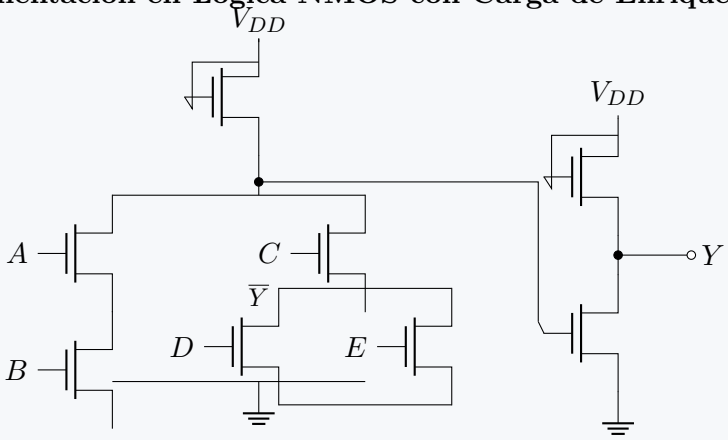
Realizar la función lógica $Y = A \cdot B + C \cdot (D + E)$: a) Con lógica NMOS con carga NMOS de enriquecimiento. b) Con lógica CMOS complementaria.

Solución Paso a Paso:

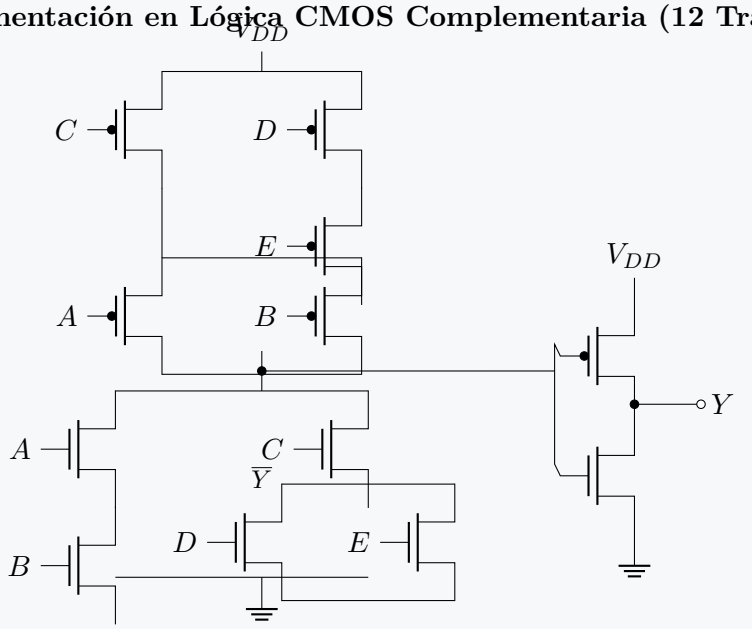
La función tiene 5 entradas $\{A, B, C, D, E\}$ y no está negada, por lo que sintetizamos primero $\overline{Y} = \overline{A \cdot B + C \cdot (D + E)}$ y añadimos una etapa inversora a la salida:

- **Red de Pull-Down (NMOS, común a ambos apartados):** Rama 1 con N_A y N_B en **serie** $(A \cdot B)$, conectada en **paralelo** con la Rama 2 formada por N_C en **serie** con el paralelo $(N_D \parallel N_E)$ que realiza $C \cdot (D + E)$.
- **Red de Pull-Up en CMOS (PMOS):** Por dualidad de De Morgan, el bloque superior $(P_A \parallel P_B)$ se conecta en **serie** con el bloque inferior formado por P_C en **paralelo** con la rama (P_D en serie con P_E).

a) Implementación en Lógica NMOS con Carga de Enriquecimiento



b) Implementación en Lógica CMOS Complementaria (12 Transistores)



Ejercicio Resuelto: Síntesis de $Y = A + B \cdot (C + D)$ — Examen Enero 2019 FFT

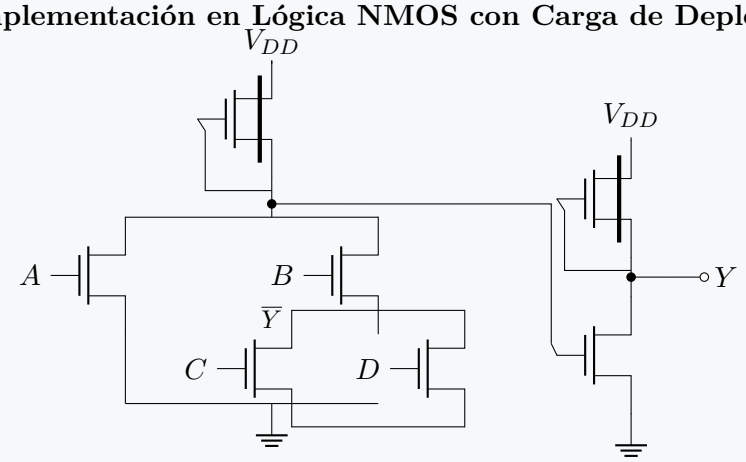
Realizar la función lógica $Y = A + B \cdot (C + D)$: a) Con lógica NMOS con carga NMOS de deplexión. b) Con lógica CMOS complementaria.

Solución Paso a Paso:

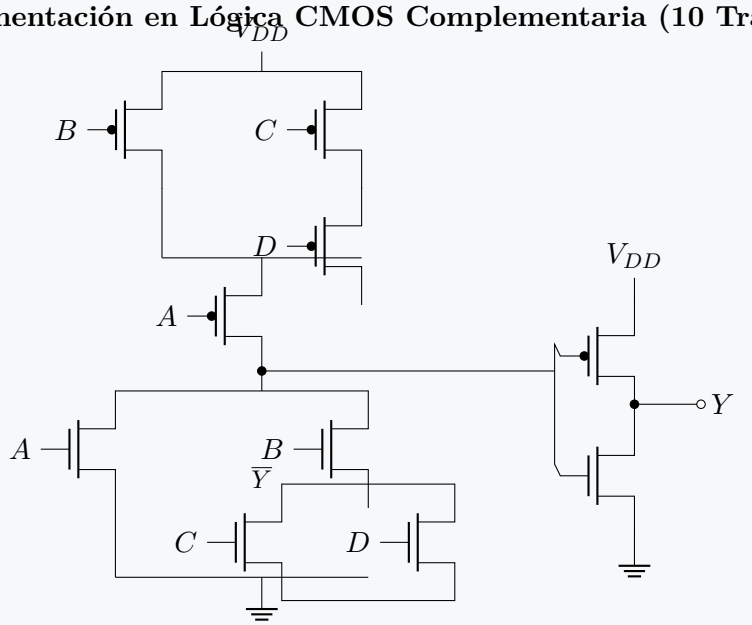
Sintetizamos en la primera etapa $\overline{Y} = \overline{A + B \cdot (C + D)}$ y colocamos un inversor en la salida:

- **Red PDN (NMOS):** El transistor N_A va en **paralelo** con la rama formada por N_B en **serie** con el paralelo ($N_C \parallel N_D$).
- **Red PUN en CMOS (PMOS):** El bloque superior formado por P_B en **paralelo** con la rama (P_C en serie con P_D) se conecta en **serie** con P_A.

a) Implementación en Lógica NMOS con Carga de Deplexión



b) Implementación en Lógica CMOS Complementaria (10 Transistores)



Ejercicio Resuelto: Cálculo de Márgenes de Ruido, Fan-Out y Disipación de Potencia

Una familia lógica digital alimentada a $V_{DD} = 3{,}3$ V presenta los siguientes parámetros garantizados por el fabricante: $V_{OH} = 3{,}0$ V, $V_{OL} = 0{,}2$ V, $V_{IH} = 2{,}0$ V, $V_{IL} = 0{,}8$ V; corrientes máximas de salida $|I_{OH}| = 400$ µA, $I_{OL} = 8$ mA y corrientes de entrada $|I_{IH}| = 20$ µA, $|I_{IL}| = 0{,}4$ mA. La capacidad de carga equivalente en la salida es $C_L = 20$ pF, conmutando a una frecuencia $f = 50$ MHz, con tiempos de propagación $t_{pHL} = 1{,}8$ ns y $t_{pLH} = 2{,}2$ ns.

a) Calcular los márgenes de ruido en nivel alto y bajo (NM_H, NM_L) y el margen de ruido global.

b) Determinar el factor de carga o abanico de salida (*Fan-Out*).

c) Calcular el tiempo de retardo medio t_p, la potencia dinámica disipada P_D y el producto retardo-potencia PDP.

Solución Paso a Paso:

a) **Márgenes de ruido:**

$$NM_H = V_{OH} - V_{IH} = 3{,}0\ \text{V} - 2{,}0\ \text{V} = 1{,}0\ \text{V} \tag{5.12}$$

$$NM_L = V_{IL} - V_{OL} = 0{,}8\ \text{V} - 0{,}2\ \text{V} = 0{,}6\ \text{V} \implies NM = \text{mín}(1{,}0; 0{,}6) = 0{,}6\ \text{V} \tag{5.13}$$

b) **Factor de carga (*Fan-Out*):**

$$FO_H = \left\lfloor \frac{|I_{OH}|}{|I_{IH}|} \right\rfloor = \frac{400\ \mu\text{A}}{20\ \mu\text{A}} = 20, \qquad FO_L = \left\lfloor \frac{I_{OL}}{|I_{IL}|} \right\rfloor = \frac{8\ \text{mA}}{0{,}4\ \text{mA}} = 20 \implies FO = \text{mín}(20, 20) = 20\ \text{puert} \tag{5.14}$$

c) **Retardo de propagación, potencia dinámica y PDP:**

$$t_p = \frac{t_{pHL} + t_{pLH}}{2} = \frac{1{,}8 + 2{,}2}{2} = 2{,}0\ \text{ns} \tag{5.15}$$

$$P_D = C_L \cdot V_{DD}^2 \cdot f = (20 \times 10^{-12}\ \text{F}) \times (3{,}3\ \text{V})^2 \times (50 \times 10^6\ \text{Hz}) = 10{,}89\ \text{mW} \tag{5.16}$$

$$PDP = P_D \cdot t_p = (10{,}89 \times 10^{-3}\ \text{W}) \times (2{,}0 \times 10^{-9}\ \text{s}) = 21{,}78\ \text{pJ} \tag{5.17}$$

Tema 6

Amplificadores Operacionales y Conversión de Señales

Metadatos del Tema y Fuentes:

Asignatura: Fundamentos Físicos y Tecnológicos (1.º Grado en Ingeniería Informática, UGR).

Profesor: Pedro Cartujo (Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores).

Bibliografía de Referencia: Franco, S., *Design with Operational Amplifiers and Analog Integrated Circuits*, McGraw-Hill; Sedra, A. S., Smith, K. C., *Circuitos Microelectrónicos*, Oxford University Press.

Contenido: El amplificador operacional real e ideal, modelo equivalente interno, curva de transferencia y límites de saturación, realimentación negativa (cortocircuito virtual) y positiva, catálogo completo de configuraciones lineales y no lineales deducidas por Kirchhoff, conversión A/D y D/A, y colección completa de ejercicios resueltos paso a paso.

6.1 El Amplificador Operacional y el Cortocircuito Virtual

El **amplificador operacional** (denominado habitualmente *Op-Amp* o AO) es un circuito integrado analógico de acoplamiento directo, constituido internamente por decenas de transistores, resistencias y fuentes de corriente integradas, que ofrece una ganancia de tensión diferencial extraordinariamente elevada. Su nombre histórico proviene de su concepción original en los computadores analógicos para ejecutar operaciones matemáticas sobre señales de tensión (suma, resta, multiplicación por una constante, integración y derivación).

6.1.1 Terminales, Símbolo Circuital y Modelo Equivalente Interno

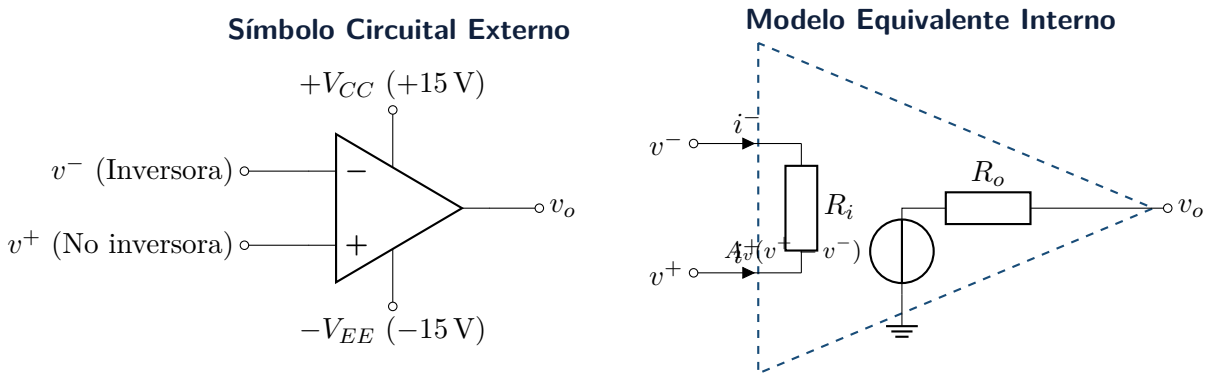
El amplificador operacional posee cinco terminales fundamentales desde el punto de vista circuital externo:

- v^+ (**Entrada No Inversora**): Terminal marcado con el signo +. Una señal aplicada en este terminal produce a la salida una tensión en fase (del mismo signo).
- v^- (**Entrada Inversora**): Terminal marcado con el signo −. Una señal aplicada en este terminal produce a la salida una tensión desfasada 180° (de signo opuesto).
- v_o (**Terminal de Salida**): Proporciona la tensión amplificada medida respecto a la referencia común (masa o tierra).
- $+V_{CC}$ (o V_{pos}) y $-V_{EE}$ (o V_{neg}) (**Terminales de Alimentación DC**): Suministran la energía eléctrica continua necesaria para polarizar los transistores internos del circuito

integrado (típicamente ±15 V o ±12 V). Estos terminales imponen los límites físicos de excursión de la salida (tensiones de saturación $+V_{sat}$ y $-V_{sat}$):

$$-V_{sat} \leq v_o \leq +V_{sat} \qquad (\text{donde } +V_{sat} \approx V_{CC} \text{ y } -V_{sat} \approx -V_{EE}) \tag{6.1}$$

En su región lineal de operación, el comportamiento interno del amplificador operacional se modela mediante una **resistencia de entrada diferencial** R_i conectada entre v^+ y v^-, y una **fuente de tensión controlada por tensión** de valor $A_v(v^+ - v^-)$ en serie con una **resistencia de salida** R_o:



6.1.2 Curva de Transferencia en Lazo Abierto y Aproximación Ideal

Si representamos la tensión de salida v_o en función de la tensión diferencial de entrada $v_d = v^+ - v^-$ cuando el operacional trabaja sin red exterior (en lazo abierto), se distinguen tres regiones:

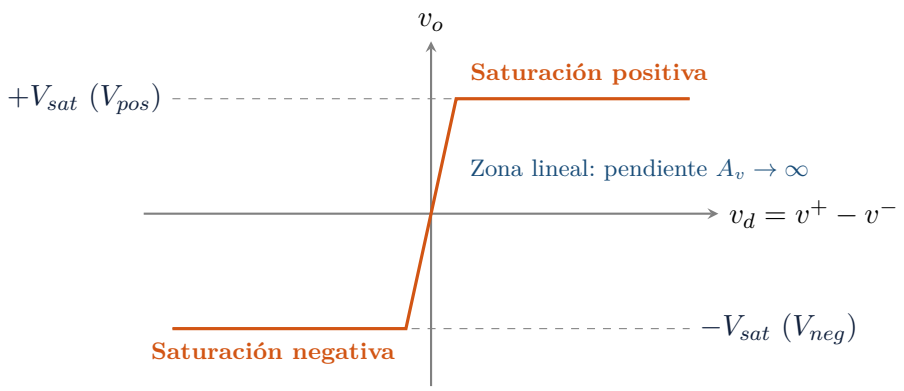
1. **Región Lineal Estrecha:** Para diferencias $|v^+ - v^-| < \frac{V_{sat}}{A_v}$, la salida es directamente proporcional a la entrada diferencial:

$$v_o = A_v(v^+ - v^-) \tag{6.2}$$

   Dado que A_v es del orden de 10^5 a 10^6 V/V, la pendiente en el origen es prácticamente vertical.

2. **Saturación Positiva ($+V_{sat}$ o V_{pos}):** Cuando $v^+ - v^- > \frac{+V_{sat}}{A_v}$, la salida queda recortada en su techo de alimentación $+V_{sat}$.

3. **Saturación Negativa ($-V_{sat}$ o V_{neg}):** Cuando $v^+ - v^- < \frac{-V_{sat}}{A_v}$, la salida queda recortada en su suelo de alimentación $-V_{sat}$.



Definición: Características del Amplificador Operacional Ideal

Para el análisis de circuitos electrónicos utilizamos el **modelo ideal del amplificador operacional**, definido por las siguientes condiciones límite:

1. **Ganancia de Tensión Diferencial Infinita:** $A_v \to \infty$ (en un operacional comercial real típico, $A_v \sim 10^5 - 10^6$).
2. **Resistencia de Entrada Infinita:** $R_i \to \infty$ (en tecnología bipolar $R_i \sim \text{M}\Omega$ y en tecnología CMOS/JFET $R_i \sim 10^{12}\ \Omega$). Como consecuencia directa, **las corrientes que entran a los terminales inversor y no inversor son estrictamente nulas**:
$$i^+ = 0, \qquad i^- = 0 \tag{6.3}$$
3. **Resistencia de Salida Nula:** $R_o = 0\ \Omega$, de modo que la tensión de salida $v_o = A_v(v^+ - v^-)$ no cae al conectar cargas exteriores.
4. **Ancho de Banda Infinito ($BW \to \infty$) y Rechazo al Modo Común Infinito ($CMRR \to \infty$):** Amplifica por igual cualquier frecuencia y responde exclusivamente a la diferencia $(v^+ - v^-)$.

6.1.3 Realimentación Negativa vs. Realimentación Positiva y Cortocircuito Virtual

Se denomina **realimentación** (*feedback*) a toda red que establece una conexión entre el terminal de salida v_o y alguno de los terminales de entrada del operacional:

- **Realimentación Negativa (Estabilizadora — Opera en Zona Lineal):** La salida v_o se reconecta a la **entrada inversora** v^- (por ejemplo, mediante un divisor resistivo $R_1 - R_2$). Con el paso del tiempo, el lazo corrige cualquier desequilibrio hasta forzar la igualdad de potenciales $v^- = v^+$:

  Si $v^- > v^+ \implies (v^+ - v^-) < 0 \implies v_o \downarrow \implies v^- \downarrow \implies (v^+ - v^-) \uparrow \implies$ equilibrio $v^+ = v^-$
  Si $v^- < v^+ \implies (v^+ - v^-) > 0 \implies v_o \uparrow \implies v^- \uparrow \implies (v^+ - v^-) \downarrow \implies$ equilibrio $v^+ = v^-$

- **Realimentación Positiva (Regenerativa — Lleva a Saturación):** La salida v_o se reconecta a la **entrada no inversora** v^+. En este caso **no se igualan** v^- y v^+; cualquier pequeña diferencia inicial se amplifica regenerativamente hasta saturar la salida en $+V_{CC}$ o $-V_{CC}$:

  Si $v^- > v^+ \implies (v^+ - v^-) < 0 \implies v_o \downarrow \implies v^+ \downarrow \implies (v^+ - v^-) \downarrow \implies v_o$ se limita a $-V_{CC}$
  Si $v^- < v^+ \implies (v^+ - v^-) > 0 \implies v_o \uparrow \implies v^+ \uparrow \implies (v^+ - v^-) \uparrow \implies v_o$ se limita a $+V_{CC}$

Ley / Teorema: Principio del Cortocircuito Virtual y Reglas de Oro

Cuando un amplificador operacional ideal dispone de **realimentación negativa** y su salida se mantiene dentro de los límites lineales ($-V_{sat} < v_o < +V_{sat}$), el cociente finito entre la salida y la ganancia infinita obliga a que la tensión diferencial de entrada sea nula:
$$v^+ - v^- = \frac{v_o}{A_v} \xrightarrow{A_v \to \infty} 0 \implies \mathbf{v^+ = v^-} \tag{6.4}$$
Este fenómeno recibe el nombre de **cortocircuito virtual**: ambos terminales están exactamente al mismo potencial eléctrico ($v^+ = v^-$) pero sin que circule corriente entre

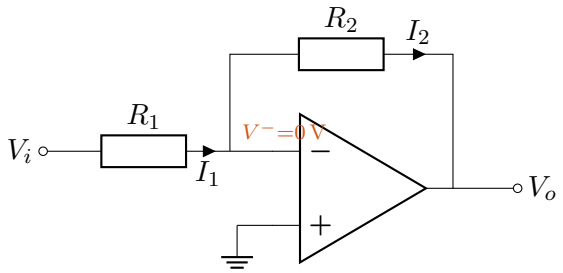
ellos ($i^+ = i^- = 0$). Si además uno de los terminales está conectado directamente a tierra (0 V), el otro terminal queda a 0 V sin estar físicamente conectado a masa, lo que se denomina **masa virtual**.

6.2 Configuraciones Lineales Básicas con Op-Amp

A continuación se deducen paso a paso, aplicando las leyes de Kirchhoff y las dos reglas de oro del operacional ideal ($v^+ = v^-$ e $i^+ = i^- = 0$), todas las configuraciones lineales fundamentales del temario.

6.2.1 1. Amplificador Inversor

La tensión de entrada V_i se aplica a través de la resistencia R_1 al terminal inversor (v^-), mientras que la resistencia de realimentación R_2 conecta la salida V_o con v^-. El terminal no inversor se conecta directamente a masa ($V^+ = 0$ V).



- **Condiciones ideales (masa virtual):** Como hay realimentación negativa, $V^- = V^+ = 0$ V, e $I^- = I^+ = 0$.

- **Ley de las Corrientes de Kirchhoff (LCK) en el nodo inversor:** Toda la corriente I_1 que llega por R_1 debe continuar por R_2 hacia la salida:

$$I_1 = I_2 \implies \frac{V_i - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_o}{R_2} \tag{6.5}$$

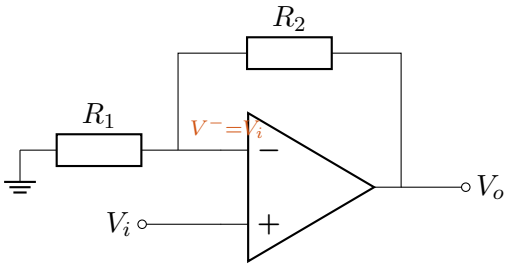
- Sustituyendo $V^- = 0$ V:

$$\frac{V_i}{R_1} = -\frac{V_o}{R_2} \implies \boxed{V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_i} \qquad \left(A_v = \frac{V_o}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1}\right) \tag{6.6}$$

- **Resistencia de entrada del circuito:** Como el nodo V^- está a masa virtual (0 V), la resistencia equivalente que ve el generador V_i es exactamente $R_{in} = \frac{V_i}{I_1} = R_1$.

6.2.2 2. Amplificador No Inversor

La señal de entrada V_i se aplica directamente a la entrada no inversora (V^+). La red de realimentación negativa está formada por el divisor resistivo R_1 (entre V^- y masa) y R_2 (entre V^- y la salida V_o).



- **Condiciones ideales:** Por cortocircuito virtual, $V^- = V^+ = V_i$, con $I^- = I^+ = 0$.
- **LCK en el nodo inversor:** Aplicando el balance de corrientes entre la rama a masa (R_1) y la rama de realimentación (R_2):

$$\frac{0 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_o}{R_2} \tag{6.7}$$

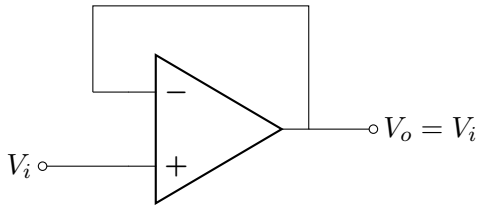
- Sustituyendo $V^- = V_i$ y despejando V_o:

$$-\frac{V_i}{R_1} = \frac{V_i}{R_2} - \frac{V_o}{R_2} \implies \frac{V_o}{R_2} = V_i\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1}\right) \implies \boxed{V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V_i} \tag{6.8}$$

- **Propiedades clave:** La ganancia $A_v = 1 + \frac{R_2}{R_1} \geq 1$ es siempre positiva (no invierte la fase) y la resistencia de entrada vista por V_i es idealmente infinita ($R_{in} \to \infty$, puesto que $I^+ = 0$).

6.2.3 3. Seguidor de Tensión (Buffer de Ganancia Unidad)

Es el caso límite del amplificador no inversor cuando se hace $R_2 = 0\ \Omega$ (cortocircuito directo entre la salida y la entrada inversora) y $R_1 \to \infty$ (circuito abierto a masa):



$$\boxed{V_o = V_i \qquad (A_v = 1)} \tag{6.9}$$

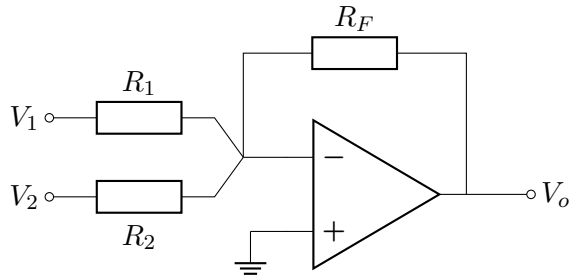
Importante / Ojo Examen: Utilidad del Seguidor de Tensión como Adaptador de Impedancias

Aunque no amplifica en tensión ($A_v = 1$), el seguidor ofrece una impedancia de entrada infinita ($R_{in} \to \infty$, no consume corriente de la fuente previa) y una impedancia de salida nula ($R_{out} = 0$, capaz de entregar corriente a la carga sin caída de tensión). Se utiliza para **aislar etapas y eliminar el efecto de carga**.

6.2.4 4. Sumador Inversor y Sumador No Inversor

a) Sumador Inversor

Varias señales de entrada $V_1, V_2, \ldots, V_n$ se aplican a través de sus respectivas resistencias $R_1, R_2, \ldots, R_n$ al nodo común de la entrada inversora V^-, mientras que $V^+ = 0$ V.



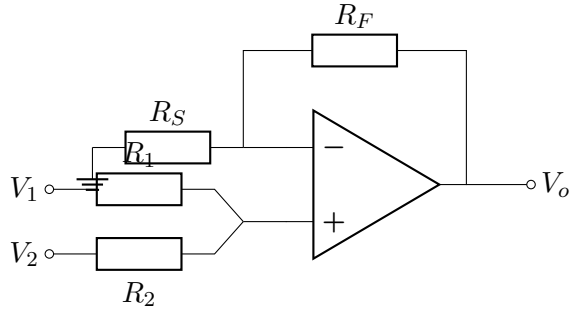
Aplicando LCK en el nodo inversor con la condición ideal de masa virtual ($V^- = V^+ = 0$ V):

$$\frac{V_1 - V^-}{R_1} + \frac{V_2 - V^-}{R_2} = \frac{V^- - V_o}{R_F} \implies \boxed{V_o = -R_F\left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2}\right)} \tag{6.10}$$

Para n entradas: $V_o = -R_F \sum_{k=1}^{n} \frac{V_k}{R_k}$. En el caso particular en que todas las resistencias sean iguales ($R_1 = R_2 = R_F$), resulta $V_o = -(V_1 + V_2)$.

b) Sumador No Inversor

Las señales V_1 y V_2 se aplican mediante R_1 y R_2 al terminal no inversor (V^+), mientras que la red inversora incorpora el divisor $R_S - R_F$:



- En el terminal no inversor ($I^+ = 0$):

$$I_{R1} = I_{R2} \implies \frac{V_1 - V^+}{R_1} = \frac{V^+ - V_2}{R_2} \implies V^+ = \frac{R_2 V_1 + R_1 V_2}{R_1 + R_2} = V^- \tag{6.11}$$

- En el terminal inversor ($I^- = 0$):

$$\frac{0 - V^-}{R_S} = \frac{V^- - V_o}{R_F} \implies V_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_S}\right) V^- \tag{6.12}$$

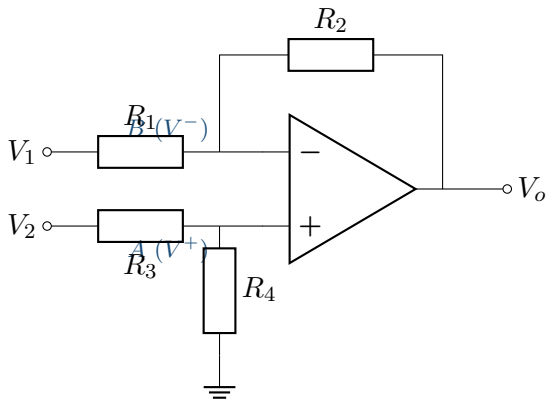
- Sustituyendo V^- se obtiene la ecuación general del sumador no inversor:

$$\boxed{V_o = \left(1 + \frac{R_F}{R_S}\right)\left(\frac{R_2 V_1 + R_1 V_2}{R_1 + R_2}\right)} \tag{6.13}$$

Si se eligen resistencias simétricas $R_1 = R_2$ y $R_F = R_S$, los factores $(1+1) = 2$ y $\frac{1}{2}$ se cancelan y resulta la suma pura sin inversión: $V_o = V_1 + V_2$.

6.2.5 5. Amplificador Diferencial (Restador)

Permite amplificar la diferencia entre dos señales de entrada V_1 y V_2:



- **Kirchhoff en el punto A (V^+):** Como $I^+ = 0$, las resistencias R_3 y R_4 forman un divisor de tensión:

$$I_{R3} = I_{R4} \implies \frac{V_2 - V^+}{R_3} = \frac{V^+}{R_4} \implies V^+ = \left(\frac{R_4}{R_3 + R_4}\right) V_2 = V^- \tag{6.14}$$

- **Kirchhoff en el punto B (V^-):** Como $I^- = 0$:

$$I_{R1} = I_{R2} \implies \frac{V_1 - V^-}{R_1} = \frac{V^- - V_o}{R_2} \implies V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) V^- - \frac{R_2}{R_1} V_1 \tag{6.15}$$

- Sustituyendo la expresión de V^-:

$$\boxed{V_o = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)\left(\frac{R_4}{R_3 + R_4}\right) V_2 - \frac{R_2}{R_1} V_1} \tag{6.16}$$

- **Caso de puente resistivo equilibrado ($\frac{R_2}{R_1} = \frac{R_4}{R_3}$, por ejemplo $R_1 = R_3$ y $R_2 = R_4$):**

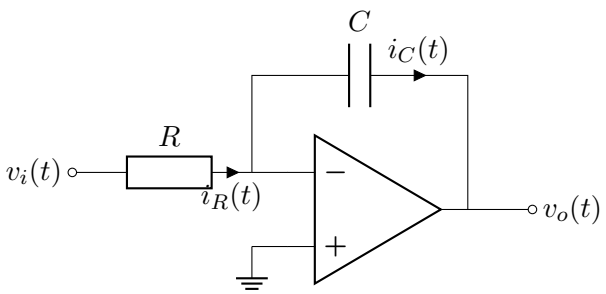
$$\boxed{V_o = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1)} \tag{6.17}$$

6.2.6 6. Integrador Inversor y Derivador Inversor

Al sustituir una de las resistencias del amplificador inversor por un condensador C, se obtienen operadores dinámicos en el dominio del tiempo:

a) Integrador Inversor

La resistencia R se sitúa en la entrada y el condensador C en el lazo de realimentación negativa:



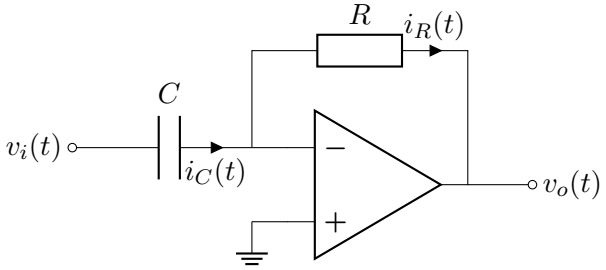
Con $V^- = V^+ = 0$ V e $i_R(t) = i_C(t)$:

$$\frac{v_i(t) - 0}{R} = C\frac{d(0 - v_o(t))}{dt} = -C\frac{dv_o(t)}{dt} \implies \boxed{v_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t v_i(\tau)\,d\tau + v_o(0)} \tag{6.18}$$

En régimen permanente sinusoidal ($\mathbf{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$), su función de transferencia fasorial es $H(j\omega) = -\frac{1}{j\omega RC}$ (comportamiento pasa-bajos con polo en el origen).

b) Derivador Inversor

El condensador C se ubica en la rama de entrada y la resistencia R en el lazo de realimentación:



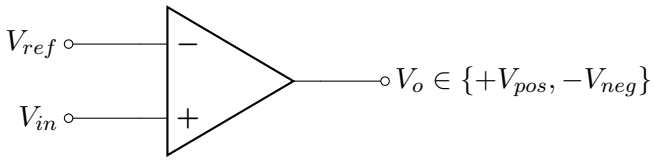
Con $V^- = V^+ = 0$ V e $i_C(t) = i_R(t)$:

$$i_C(t) = C\frac{dv_i(t)}{dt} = \frac{0 - v_o(t)}{R} \implies \boxed{v_o(t) = -RC\frac{dv_i(t)}{dt}} \tag{6.19}$$

6.2.7 7. Configuraciones No Lineales: Comparador y Disparador de Schmitt

a) Comparador Básico en Lazo Abierto

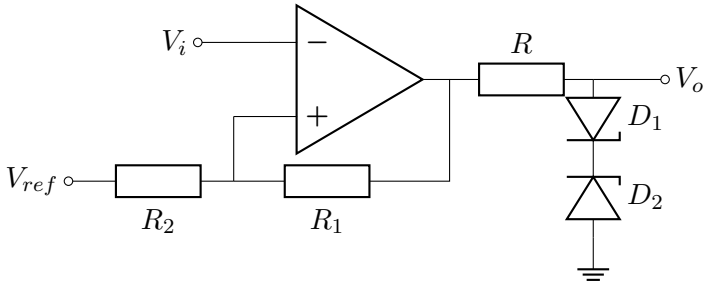
Sin realimentación, el operacional compara instantáneamente las tensiones en sus entradas V^+ y V^-:



$$V_o = \begin{cases} +V_{pos}\ (+V_{sat}) & \text{si } V_{in} > V_{ref} \iff (V_{in} - V_{ref}) > 0 \\ -V_{neg}\ (-V_{sat}) & \text{si } V_{in} < V_{ref} \iff (V_{in} - V_{ref}) < 0 \end{cases} \tag{6.20}$$

b) Disparador de Schmitt (*Schmitt Trigger*) con Realimentación Positiva

Para evitar conmutaciones erráticas producidas por el ruido cuando V_i cruza el umbral de referencia, se introduce **realimentación positiva** hacia el terminal V^+ mediante las resistencias R_1 y R_2 (pudiendo acotar la salida con dos diodos Zener D_1, D_2 en antiserie):

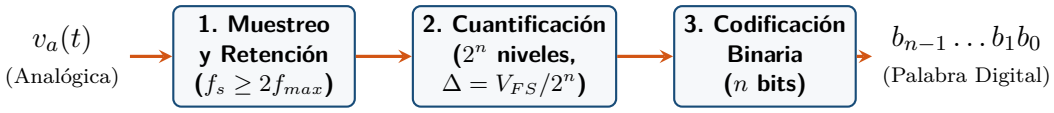


El circuito presenta **dos tensiones umbral distintas** (V_{TH} para subida y V_{TL} para bajada), creando un ciclo de **histéresis** que inmuniza al comparador frente al ruido de alta frecuencia.

6.3 Conversión Analógica-Digital (A/D) y Digital-Analógica (D/A)

Los sistemas digitales y computadores procesan palabras binarias discretas en tiempo y amplitud, mientras que las magnitudes del mundo físico (temperatura, presión, sonido, tensión) son señales analógicas continuas. Los convertidores A/D (ADC) y D/A (DAC) constituyen la interfaz entre ambos dominios.

6.3.1 Diagrama de Bloques y Etapas de la Digitalización (Conversión A/D)



1. **Muestreo (*Sampling*) y Teorema de Nyquist-Shannon:** Discretiza el eje temporal tomando muestras cada periodo $T_s = 1/f_s$: $x[k] = x(kT_s)$.

Ley / Teorema: Teorema del Muestreo de Nyquist-Shannon

Para poder reconstruir sin pérdida de información una señal analógica limitada en banda cuya componente de frecuencia máxima sea f_{max}, la frecuencia de muestreo f_s debe cumplir:

$$\boxed{f_s \geq 2f_{max}} \tag{6.21}$$

A la frecuencia crítica $f_N = 2f_{max}$ se la denomina **tasa de Nyquist**. Si $f_s < 2f_{max}$, los espectros periódicos se solapan provocando distorsión irreversible por **aliasing** (solapamiento espectral).

2. **Cuantificación (*Quantization*):** Discretiza el eje de amplitudes asignando cada muestra analógica a uno de los $N_{niv} = 2^n$ escalones disponibles en un convertidor de n bits con rango de fondo de escala V_{FS} (*Full Scale*):

$$\boxed{\Delta = \text{LSB} = \frac{V_{FS}}{2^n}} \qquad \left(\text{o bien } \Delta = \frac{V_{FS}}{2^n - 1} \right) \tag{6.22}$$

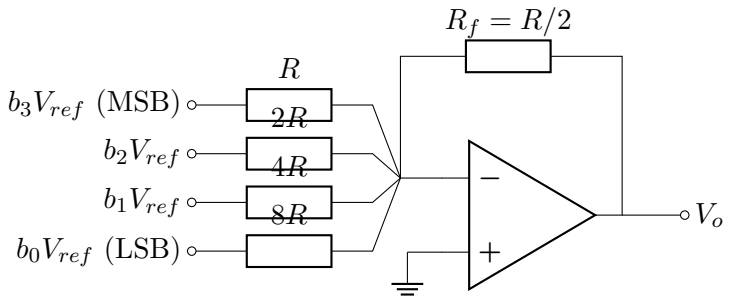
La diferencia entre el valor continuo real y el nivel discreto asignado introduce un **error de cuantificación** acotado por $|e_q| \leq \frac{\Delta}{2}$.

3. **Codificación Binaria:** Asigna a cada uno de los 2^n niveles cuantificados su representación única en binario natural o complemento a 2 de n bits ($b_{n-1}b_{n-2}\ldots b_1 b_0$).

6.3.2 Convertidores Digital-Analógicos (DAC) con Amplificador Operacional

1. DAC de Resistencias Ponderadas

Consiste en un sumador inversor cuyas resistencias de entrada siguen una progresión geométrica de potencias de dos ($R, 2R, 4R, 8R, \ldots, 2^{n-1}R$), gobernadas por conmutadores electrónicos activados por cada bit $b_k \in \{0, 1\}$ (donde b_{n-1} es el MSB y b_0 es el LSB):

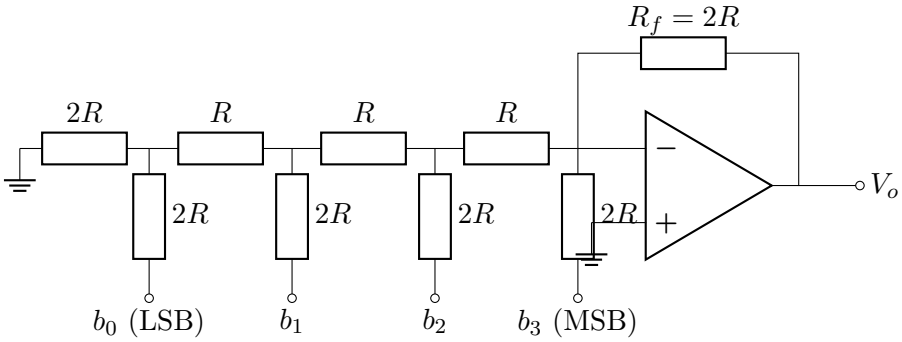


$$V_o = -R_f V_{ref}\left(\frac{b_3}{R} + \frac{b_2}{2R} + \frac{b_1}{4R} + \frac{b_0}{8R}\right) = -\frac{R_f}{R}V_{ref}\sum_{k=0}^{3}\frac{b_k}{2^{3-k}} \tag{6.23}$$

Limitación práctica: Para resoluciones altas (p. ej. $n = 12$ o 16 bits), la relación entre la resistencia del LSB ($2^{n-1}R$) y la del MSB (R) es enorme, haciendo inviable su fabricación precisa en circuitos integrados.

2. DAC de Red en Escalera R–$2R$

Resuelve el problema de tolerancias empleando **únicamente dos valores de resistencia** (R y $2R$). En cada nudo de la escalera la resistencia equivalente vista hacia la izquierda o hacia el nudo inversor es siempre $2R$, dividiendo exactamente por 2 la contribución de cada bit sucesivo:



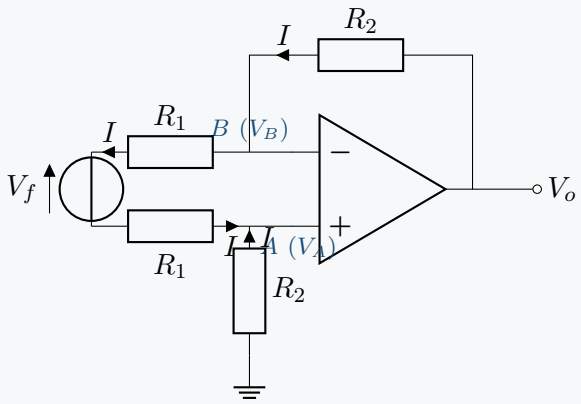
$$\boxed{V_o = -V_{ref}\left(\frac{b_3}{2} + \frac{b_2}{4} + \frac{b_1}{8} + \frac{b_0}{16}\right) = -V_{ref}\sum_{k=0}^{n-1} b_k 2^{k-n}} \tag{6.24}$$

6.4 Ejercicios Resueltos Paso a Paso de Amplificadores Operacionales

Ejercicio Resuelto: Ejercicio 1: Amplificador con Fuente Flotante

Una fuente de tensión V_f sin conexión directa a tierra se denomina **fuente flotante**. Este tipo de señal puede amplificarse a través del circuito de la figura, donde las dos resistencias conectadas en serie con la fuente valen R_1, la resistencia entre el nodo A (V^+) y tierra vale R_2, y la resistencia de realimentación entre el nodo B (V^-) y la salida V_o también vale R_2. Determinar paso a paso la tensión de salida V_o en función de V_f y la ganancia del circuito.

Esquema Circuital y Malla de Entrada:



Solución Paso a Paso:

1) **Cortocircuito virtual en la malla de la fuente flotante:** Como el amplificador operacional tiene realimentación negativa ideal, $I^+ = I^- = 0$ y los potenciales de los nodos A y B son idénticos ($V_A = V_B$). Por tanto, entre los nodos A y B la caída de tensión es nula ($V_B - V_A = 0$), cerrando una malla formada por la fuente V_f y las dos resistencias R_1 en serie. La corriente I que impulsa la fuente V_f es:

$$V_f = I \cdot R_1 + I \cdot R_1 = 2R_1 I \implies I = \frac{V_f}{2R_1} \tag{6.25}$$

2) **Cálculo de la tensión $V_A = V_B$ aplicando la Ley de Ohm en la rama inferior:** Como al terminal no inversor no entra corriente ($I^+ = 0$), la corriente I que entra en la fuente flotante por su terminal negativo procede íntegramente desde tierra (0 V) a través de la resistencia R_2 inferior:

$$0 - V_A = I \cdot R_2 \implies V_A = -I \cdot R_2 = -\frac{R_2}{2R_1} V_f = V_B \tag{6.26}$$

3) **Cálculo de la tensión de salida V_o en la rama superior:** Como tampoco entra corriente al terminal inversor ($I^- = 0$), la misma corriente I que sale de la fuente por la resistencia R_1 superior hacia el nodo B continúa por la resistencia de realimentación R_2 hacia la salida V_o:

$$V_B - V_o = I \cdot R_2 \implies V_o = V_B - I \cdot R_2 = -\frac{R_2}{2R_1} V_f - \frac{R_2}{2R_1} V_f = -\frac{R_2}{R_1} V_f \tag{6.27}$$

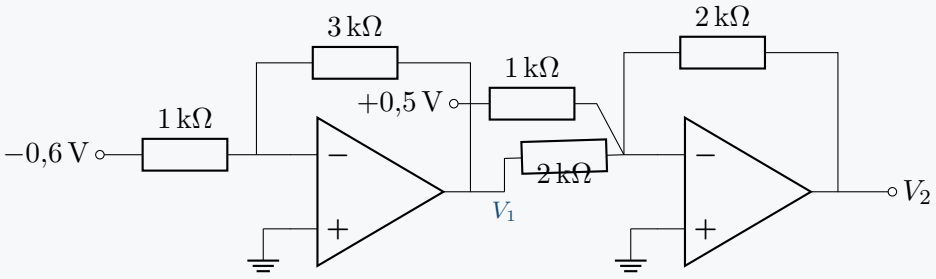
$$\boxed{V_o = -\frac{R_2}{R_1} V_f \qquad \Longrightarrow \qquad A_v = \frac{V_o}{V_f} = -\frac{R_2}{R_1}} \tag{6.28}$$

Ejercicio Resuelto: Ejercicio 2: Dos Amplificadores Operacionales en Cascada (Inversor + Sumador Inversor)

En el circuito de dos etapas en cascada de la figura, el primer amplificador operacional recibe una tensión de entrada de $-0{,}6$ V a través de una resistencia de 1 kΩ y tiene una resistencia de realimentación de 3 kΩ. Su salida V_1 ataca a través de una resistencia de 2 kΩ al nodo inversor de un segundo operacional, al cual también se conecta una

tensión de +0,5 V mediante una resistencia de 1 kΩ. La resistencia de realimentación del segundo operacional es de 2 kΩ. Calcular paso a paso las tensiones V_1 y V_2.

Esquema Circuital de las Dos Etapas en Cascada:



Solución Paso a Paso:

1) **Etapa 1 (Amplificador en configuración inversora):** Aplicando la relación del amplificador inversor con $R_{in,1} = 1$ kΩ y $R_{f,1} = 3$ kΩ:

$$V_1 = -\frac{R_{f,1}}{R_{in,1}} V_i = -\left(\frac{3\ \text{k}\Omega}{1\ \text{k}\Omega}\right) \cdot (-0{,}6\ \text{V}) = +1{,}8\ \text{V} \tag{6.29}$$

2) **Etapa 2 (Sumador inversor):** El segundo operacional suma de forma inversora la tensión +0,5 V (por 1 kΩ) y la salida de la primera etapa $V_1 = +1{,}8$ V (por 2 kΩ), con resistencia de realimentación $R_F = 2$ kΩ. Aplicando LCK en el nodo inversor del segundo operacional ($V^- = 0$ V):

$$\frac{0{,}5\ \text{V}}{1\ \text{k}\Omega} + \frac{1{,}8\ \text{V}}{2\ \text{k}\Omega} = -\frac{V_2}{2\ \text{k}\Omega} \implies \frac{1{,}0 + 1{,}8}{2} = -\frac{V_2}{2} \tag{6.30}$$

$$\boxed{V_2 = -2\ \text{k}\Omega \left(\frac{0{,}5}{1\ \text{k}\Omega} + \frac{1{,}8}{2\ \text{k}\Omega}\right) = -2 \cdot (0{,}5 + 0{,}9) = -2{,}8\ \text{V}} \tag{6.31}$$

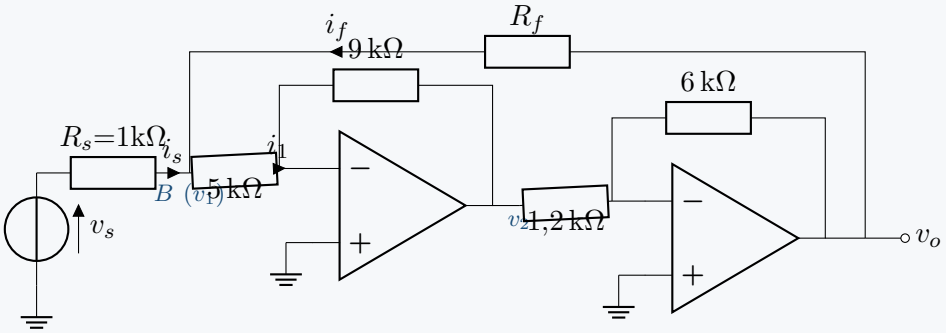
Ejercicio Resuelto: Ejercicio 3: Dos Operacionales Inversores en Cascada con Realimentación Global R_f

En el circuito de la figura, una fuente de tensión v_s con resistencia serie $R_s = 1$ kΩ alimenta el nodo B (de tensión v_1). A partir de v_1 se conectan en cascada dos etapas inversoras: la primera tiene resistencia de entrada 5 kΩ y resistencia de realimentación 9 kΩ (salida v_2), y la segunda tiene resistencia de entrada 1,2 kΩ y resistencia de realimentación 6 kΩ (salida final v_o). Además, existe una resistencia de realimentación global R_f entre la salida final v_o y el nodo v_1. Hallar las tensiones v_1, v_2, v_o y las corrientes i_s, i_1, i_f en función de v_s para:

a) $R_f = \infty$ (lazo global abierto).

b) $R_f = 40$ kΩ.

Esquema Circuital Completo:



Solución Paso a Paso:

En primer lugar, como ambos operacionales están en configuración inversora (sus entradas inversoras están a masa virtual 0 V), las relaciones entre v_1, v_2 y v_o son siempre:

$$v_2 = -\frac{9\ \text{k}\Omega}{5\ \text{k}\Omega} v_1 = -1{,}8\, v_1 \tag{6.32}$$

$$v_o = -\frac{6\ \text{k}\Omega}{1{,}2\ \text{k}\Omega} v_2 = -5\, v_2 = -5\left(-\frac{9}{5} v_1\right) = +9\, v_1 \tag{6.33}$$

Apartado a) Para $R_f = \infty$: Al estar R_f en circuito abierto, la corriente de realimentación global es nula ($i_f = 0$). Como la entrada inversora del primer operacional está a masa virtual (0 V), las resistencias $R_s = 1$ kΩ y 5 kΩ quedan en serie hacia masa virtual, formando un divisor de tensión:

$$i_1 = i_s = \frac{v_s}{1\ \text{k}\Omega + 5\ \text{k}\Omega} = \frac{v_s}{6\ \text{k}\Omega}, \qquad v_1 = \frac{5\ \text{k}\Omega}{1\ \text{k}\Omega + 5\ \text{k}\Omega} v_s = \frac{5}{6} v_s \tag{6.34}$$

Sustituyendo v_1 en las ganancias de cada etapa:

$$v_2 = -\frac{9}{5}\left(\frac{5}{6} v_s\right) = -\frac{3}{2} v_s = -1{,}5\, v_s, \qquad v_o = -\frac{6}{1{,}2} v_2 = -5\left(-\frac{3}{2} v_s\right) = +\frac{15}{2} v_s = +7{,}5\, v_s \tag{6.35}$$

(Nota: en el manuscrito original se arrastró el signo negativo al multiplicar $-\frac{6}{1{,}2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$ escribiendo $-7{,}5\, v_s$; algebraicamente el producto de dos etapas inversoras da ganancia positiva $+7{,}5\, v_s$).

Apartado b) Para $R_f = 40$ kΩ ($i_f \neq 0$): Aplicamos LCK en el nodo B (v_1), donde $i_s + i_f = i_1$:

$$\frac{v_s - v_1}{1\ \text{k}\Omega} + \frac{v_o - v_1}{40\ \text{k}\Omega} = \frac{v_1 - 0}{5\ \text{k}\Omega} \tag{6.36}$$

Multiplicando toda la ecuación por 40 kΩ:

$$40(v_s - v_1) + (v_o - v_1) = 8v_1 \implies 40v_s - 40v_1 + v_o - v_1 = 8v_1 \tag{6.37}$$

Sustituyendo la relación de las dos etapas en cascada ($v_o = 9v_1$):

$$40v_s - 40v_1 + 9v_1 - v_1 = 8v_1 \implies 40v_s = 40v_1 \implies \boxed{v_1 = v_s} \tag{6.38}$$

Por consiguiente, las demás tensiones e intensidades resultan ser:

$$\boxed{v_2 = -\frac{9}{5} v_s, \qquad v_o = 9v_s, \qquad i_s = \frac{v_s - v_1}{1\ \text{k}\Omega} = 0, \qquad i_f = i_1 = \frac{v_1}{5\ \text{k}\Omega} = \frac{v_s}{5\ \text{k}\Omega}} \tag{6.39}$$

Ejercicio Resuelto: Ejercicio 4: Integrador Inversor con Entrada Sinusoidal

En un circuito integrador inversor con Op-Amp ideal se tiene $R = 1$ kΩ, $C = 1$ µF y una señal de entrada $v_1(t) = \sin(2000t)$ V. Asumiendo que el condensador parte descargado en el instante inicial, $v_2(0) = 0$ V, encontrar la expresión temporal de la tensión de salida $v_2(t)$ para $t > 0$.

Solución Paso a Paso:

1) Por cortocircuito virtual en el integrador inversor ($V^+ = V^- = 0$ V) e $I^+ = I^- = 0$:

$$i_R(t) = i_C(t) \implies \frac{v_1(t)}{R} = C\frac{d(0 - v_2(t))}{dt} = -C\frac{dv_2(t)}{dt} \tag{6.40}$$

2) Integrando entre 0 y t con $RC = (1\times10^3\ \Omega)\cdot(1\times10^{-6}\ \text{F}) = 10^{-3}$ s y $\omega = 2000$ rad/s:

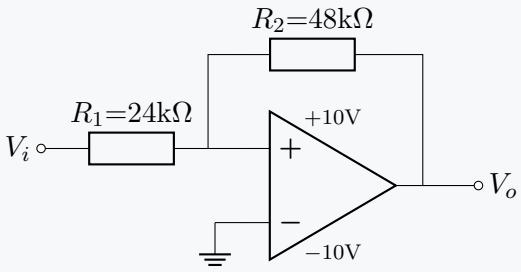
$$v_2(t) - v_2(0) = -\frac{1}{RC}\int_0^t \sin(2000\tau)\,d\tau = -\frac{1}{10^{-3}}\left[-\frac{\cos(2000\tau)}{2000}\right]_0^t \tag{6.41}$$

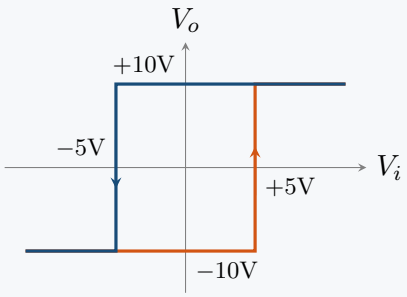
$$v_2(t) = \frac{1000}{2000}\left[\cos(2000t) - \cos(0)\right] = \boxed{0{,}5\left[\cos(2000t) - 1\right]\ \text{V}} \tag{6.42}$$

Ejercicio Resuelto: Ejercicio 5: Comparador con Realimentación Positiva (Ciclo de Histéresis)

Analizar el circuito comparador con realimentación positiva de la figura y dibujar su función de transferencia con histéresis. El operacional satura en $+10$ V y -10 V, tiene su entrada inversora conectada a masa ($V^- = 0$ V), la señal V_i se aplica a V^+ a través de $R_1 = 24$ kΩ, y la resistencia de realimentación entre V^+ y V_o es $R_2 = 48$ kΩ.

Esquema Circuital y Lazo de Histéresis:





Solución Paso a Paso:

1) **Expresión del potencial V^+:** Como $I^+ = 0$, la corriente por R_1 es igual a la corriente por R_2:

$$\frac{V_i - V^+}{24\ \text{k}\Omega} = \frac{V^+ - V_o}{48\ \text{k}\Omega} \implies 2(V_i - V^+) = V^+ - V_o \implies V^+ = \frac{2V_i + V_o}{3} \tag{6.43}$$

2) **Barrido ascendente (partiendo de $V_i \ll 0$, con $V_o = -10$ V):** El comparador conmutará a $+10$ V cuando V^+ alcance el potencial de $V^- = 0$ V:

$$V^+ = \frac{2V_i - 10}{3} = 0 \implies V_{TH} = +5\ \text{V} \tag{6.44}$$

Para $V_i > +5$ V, la salida pasa a $V_o = +10$ V.

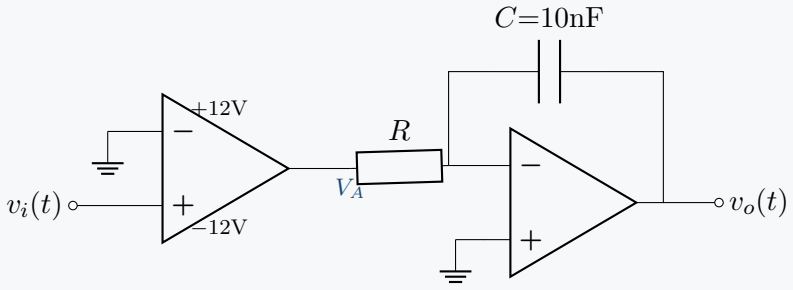
3) **Barrido descendente (regresando desde $V_i \gg 0$, con $V_o = +10$ V):** Ahora $V_o = +10$ V, por lo que la conmutación de vuelta a -10 V ocurrirá cuando $V^+ = 0$ V:

$$V^+ = \frac{2V_i + 10}{3} = 0 \implies V_{TL} = -5 \text{ V} \tag{6.45}$$

Ejercicio Resuelto: Ejercicio 6: Conversión de Onda Sinusoidal a Cuadrada y Triangular (Comparador + Integrador)

En el circuito de la figura, una señal sinusoidal $v_i(t) = 1\sin(\omega t)$ V de frecuencia $f = 100$ kHz ataca a un primer operacional conectado como comparador en lazo abierto (con límites de saturación ± 12 V y $V^- = 0$ V), cuya salida V_A alimenta a un integrador inversor con resistencia R y condensador $C = 10$ nF. Sabiendo que en $t = 0$ es $v_o(0) = +1$ V, calcular el valor de R para que la señal triangular de salida $v_o(t)$ oscile simétricamente entre $+1$ V y -1 V.

Esquema Circuital (Comparador + Integrador):



Solución Paso a Paso:

1) **Periodo y salida del comparador (V_A):** El periodo de la señal de entrada es $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{100 \text{ kHz}} = 10$ µs, luego cada semiperiodo dura $T/2 = 5$ µs. Durante el primer semiperiodo $t \in (0, T/2)$, es $v_i(t) > 0$ V, por lo que el comparador satura positivamente entregando una tensión constante $V_A = +12$ V (en el segundo semiperiodo entrega $V_A = -12$ V, formando una onda cuadrada de ± 12 V).

2) **Integración en el semiperiodo $[0, T/2]$:** La ecuación del integrador inversor es:

$$v_o(T/2) = -\frac{1}{RC}\int_0^{T/2} V_A \, dt + v_o(0) \tag{6.46}$$

Para que $v_o(t)$ descienda linealmente desde $v_o(0) = +1$ V hasta $v_o(T/2) = -1$ V en el intervalo $T/2 = 5$ µs:

$$-1 \text{ V} - 1 \text{ V} = -\frac{1}{RC} \cdot 12 \text{ V} \cdot \left(\frac{T}{2}\right) \implies -2 = -\frac{12 \cdot 5 \text{ µs}}{R \cdot 10 \text{ nF}} \tag{6.47}$$

$$\boxed{R = \frac{12 \text{ V} \cdot 5 \times 10^{-6} \text{ s}}{2 \text{ V} \cdot 10 \times 10^{-9} \text{ F}} = 3 \times 10^3 \ \Omega = 3 \text{ k}\Omega} \tag{6.48}$$

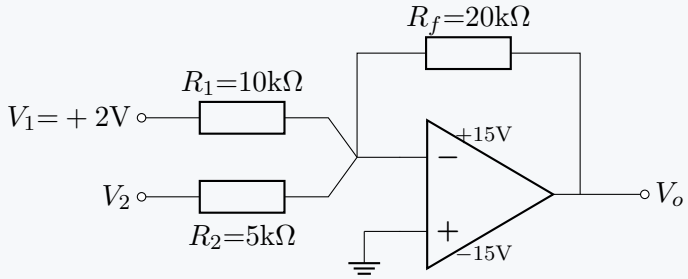
Ejercicio Resuelto: Ejercicio 7: Sumador-Inversor con Chequeo de Saturación — Examen UGR

Un amplificador operacional ideal está alimentado simétricamente con $\pm V_{CC} = \pm 15$ V ($V_{sat} = \pm 14$ V). Dispone de una resistencia de realimentación $R_f = 20$ kΩ conectada a la entrada inversora, mientras la entrada no inversora está conectada a masa ($V^+ = 0$ V). Al nudo inversor se aplican dos tensiones mediante sendas resistencias: $V_1 = +2$ V a través de $R_1 = 10$ kΩ, y $V_2 = -3$ V a través de $R_2 = 5$ kΩ.

a) Calcular la tensión de salida V_o.

b) Si se modifica la señal 2 pasando a $V_2 = -6$ V, determinar la nueva tensión de salida indicando si el operacional satura.

Esquema Circuital del Sumador Inversor:



Solución Paso a Paso:

a) Con $V_1 = +2$ V y $V_2 = -3$ V:

$$V_o = -R_f \left(\frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} \right) = -20 \left(\frac{2}{10} + \frac{-3}{5} \right) = -20(0{,}20 - 0{,}60) = -20(-0{,}40) = +8{,}0 \text{ V} \tag{6.49}$$

Como $|V_o| = 8{,}0$ V $< V_{sat} = 14$ V, trabaja en régimen lineal sin saturación.

b) Con $V_2 = -6$ V:

$$V_{o,\text{calculado}} = -20 \left(\frac{2}{10} + \frac{-6}{5} \right) = -20(0{,}20 - 1{,}20) = -20(-1{,}00) = +20{,}0 \text{ V} \tag{6.50}$$

Como $+20{,}0$ V $> +V_{sat} = +14$ V, el amplificador entra en **saturación positiva**:

$$\boxed{V_o = +V_{sat} = +14{,}0 \text{ V}} \tag{6.51}$$

Ejercicio Resuelto: Ejercicio 8: Integrador Inversor ante Entrada Escalonada

Un circuito integrador inversor con Op-Amp ideal dispone de $R = 50$ kΩ y $C = 2$ µF, con tensiones de saturación ±12 V. El condensador está inicialmente descargado ($V_o(0) = 0$ V). En $t = 0$ se aplica una tensión escalón constante $V_i = +2$ V.

a) Hallar la expresión temporal de $V_o(t)$ en régimen lineal y la pendiente de la rampa.

b) Determinar el tiempo que tarda la salida en alcanzar la saturación negativa.

Solución Paso a Paso:

a) La constante de tiempo integradora es $RC = (50 \times 10^3\ \Omega) \times (2 \times 10^{-6}\ \text{F}) = 0{,}10\ \text{s} = 100\ \text{ms}$. Para una entrada constante $V_i = +2\ \text{V}$:

$$V_o(t) = -\frac{1}{RC}\int_0^t V_i\, d\tau + V_o(0) = -\frac{V_i}{RC}t = -\frac{2}{0{,}10}t = -20t\ \text{V} \qquad \left(\frac{dV_o}{dt} = -20\ \text{V/s}\right) \tag{6.52}$$

b) Alcanza la saturación negativa cuando $V_o(t_{sat}) = -V_{sat} = -12\ \text{V}$:

$$-20t_{sat} = -12 \implies \boxed{t_{sat} = \frac{12}{20} = 0{,}60\ \text{s} = 600\ \text{ms}} \tag{6.53}$$

Tema 7

Colección de Exámenes Oficiales Resueltos Paso a Paso

Metadatos del Tema y Fuentes:

Asignatura: Fundamentos Físicos y Tecnológicos (1.º Grado en Ingeniería Informática, UGR).

Profesor: Pedro Cartujo (Departamento de Electrónica y Tecnología de Computadores).

Contenido: Resolución íntegra, detallada y paso a paso de los Exámenes Parciales Oficiales (Parcial 1: Electromagnetismo y Circuitos DC/AC; Parcial 2: Familias Lógicas NMOS/CMOS, Redes de Diodos y Amplificadores Operacionales Acoplados), incluyendo todos los diagramas circuitales y métodos alternativos de resolución.

7.1 Examen Parcial 1: Electromagnetismo y Circuitos DC/AC

Ejercicio Resuelto: Parcial 1 — Problema 1: Ley de Ampère, Campo Magnético y Fuerza entre Tres Hilos Paralelos

1) Calcular utilizando la **Ley de Ampère** la expresión del campo magnético $\vec{B}$ que crea un cable conductor rectilíneo indefinido por el que circula una intensidad I a una distancia radial r (o d).

2) Se tienen tres cables conductores rectilíneos y paralelos de longitud $L = 50$ cm $= 0{,}5$ m (mucho mayor que la distancia que los separa), situados en el vacío ($\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T m/A), por los cuales circulan corrientes continuas en el mismo sentido:

$$I_1 = 2 \text{ mA}, \qquad I_2 = 4 \text{ mA}, \qquad I_3 = 6 \text{ mA} \tag{7.1}$$

   a) Calcular los campos magnéticos que producen los cables sobre cada uno de los otros dos indicando su módulo, dirección y sentido.

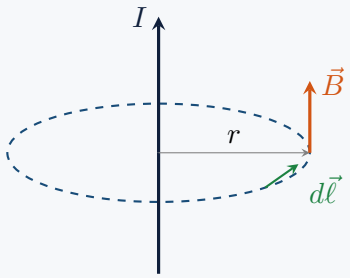
   b) Calcular las fuerzas magnéticas netas que se producen debido a estos campos sobre cada uno de los tres cables, indicando su dirección y sentido, y verificar la Tercera Ley de Newton.

1) Deducción del Campo Magnético de un Hilo Rectilíneo mediante la Ley de Ampère:

La **Ley de Ampère** establece que la circulación del vector campo magnético $\vec{B}$ a lo

largo de cualquier línea cerrada amperiana C es proporcional a la intensidad neta de corriente I_{enc} que atraviesa la superficie delimitada por dicha curva:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{\text{enc}} \tag{7.2}$$

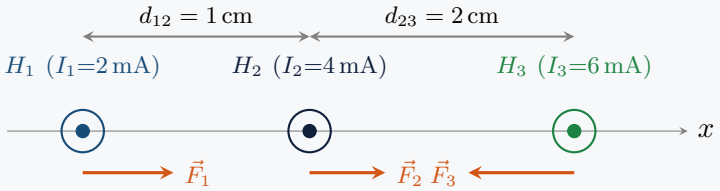


Curva cerrada amperiana circular de radio r

Tomando como camino cerrado C una circunferencia de radio r centrada en el hilo y contenida en el plano perpendicular al conductor, por simetría cilíndrica el campo $\vec{B}$ tiene el mismo módulo en todos los puntos de la circunferencia y es tangente a ella ($\vec{B} \parallel d\vec{\ell} \implies \theta = 0°$, $\cos 0° = 1$):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \oint_C B\, d\ell \cos(0°) = B \oint_C d\ell = B(2\pi r) = \mu_0 I \implies \boxed{B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}} \tag{7.3}$$

2) Diagrama Geométrico de los Tres Cables Paralelos en Corte Transversal:



Resolución Numérica Paso a Paso (Caso A: $d_{12} = 1$ cm, $d_{23} = 2$ cm $\implies d_{13} = 3$ cm):

Considerando las corrientes salientes del plano ($+\hat{k}$):

- **Sobre el Cable 1 ($x = 0$):** Los cables 2 y 3 se sitúan a su derecha y producen en H_1 campos dirigidos verticalmente hacia arriba ($+\hat{j}$):

$$B_{2\to1} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_{12}} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \cdot (4 \times 10^{-3})}{2\pi \cdot (1 \times 10^{-2})} = 8 \times 10^{-8}\ \text{T} \tag{7.4}$$

$$B_{3\to1} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi d_{13}} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \cdot (6 \times 10^{-3})}{2\pi \cdot (3 \times 10^{-2})} = 4 \times 10^{-8}\ \text{T} \tag{7.5}$$

$$\vec{B}_1 = (8+4) \times 10^{-8}\, \hat{j} = +12 \times 10^{-8}\ \text{T}\, \hat{j} = 0{,}12\ \mu\text{T}\, \hat{j} \tag{7.6}$$

Fuerza sobre el cable 1 ($\vec{F}_1 = I_1 \vec{L} \times \vec{B}_1$, hacia la derecha, atracción hacia 2 y 3):

$$|\vec{F}_1| = I_1 L B_1 = (2{\times}10^{-3}\ \text{A}){\cdot}(0{,}5\ \text{m}){\cdot}(12{\times}10^{-8}\ \text{T}) = 1{,}2{\times}10^{-10}\ \text{N (hacia la derecha)} \tag{7.7}$$

- **Sobre el Cable 2 ($x = 1$ cm):** El cable 1 (a su izquierda) crea un campo hacia abajo ($-\hat{j}$) y el cable 3 (a su derecha) crea un campo hacia arriba ($+\hat{j}$):

$$B_{1\to2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_{12}} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \cdot (2 \times 10^{-3})}{2\pi \cdot (1 \times 10^{-2})} = 4 \times 10^{-8}\ \text{T}\ (-\hat{j}) \tag{7.8}$$

$$B_{3\to2} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi d_{23}} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \cdot (6 \times 10^{-3})}{2\pi \cdot (2 \times 10^{-2})} = 6 \times 10^{-8}\ \text{T}\ (+\hat{j}) \tag{7.9}$$

$$\vec{B}_2 = (-4 + 6) \times 10^{-8}\,\hat{j} = +2 \times 10^{-8}\ \text{T}\,\hat{j} \tag{7.10}$$

Fuerza sobre el cable 2:

$$|\vec{F}_2| = I_2 L B_2 = (4{\times}10^{-3}\ \text{A}){\cdot}(0{,}5\ \text{m}){\cdot}(2{\times}10^{-8}\ \text{T}) = 0{,}4{\times}10^{-10}\ \text{N (hacia la derecha)} \tag{7.11}$$

- **Sobre el Cable 3 ($x = 3$ cm):** Tanto el cable 1 como el cable 2 están a su izquierda, creando campos hacia abajo ($-\hat{j}$):

$$B_{1\to3} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d_{13}} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \cdot (2 \times 10^{-3})}{2\pi \cdot (3 \times 10^{-2})} = 1{,}333 \times 10^{-8}\ \text{T}\ (-\hat{j}) \tag{7.12}$$

$$B_{2\to3} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi d_{23}} = \frac{(4\pi \times 10^{-7}) \cdot (4 \times 10^{-3})}{2\pi \cdot (2 \times 10^{-2})} = 4 \times 10^{-8}\ \text{T}\ (-\hat{j}) \tag{7.13}$$

$$\vec{B}_3 = -(1{,}333 + 4) \times 10^{-8}\,\hat{j} = -5{,}333 \times 10^{-8}\ \text{T}\,\hat{j} \tag{7.14}$$

Fuerza sobre el cable 3:

$$|\vec{F}_3| = I_3 L B_3 = (6{\times}10^{-3}\ \text{A}){\cdot}(0{,}5\ \text{m}){\cdot}(5{,}333{\times}10^{-8}\ \text{T}) = 1{,}6{\times}10^{-10}\ \text{N (hacia la izquierda)} \tag{7.15}$$

Comprobación de acción y reacción: $\sum \vec{F} = (+1{,}2 + 0{,}4 - 1{,}6) \times 10^{-10}\ \text{N} = 0\ \text{N}$.

Variante del Manuscrito Original (Caso B: $d_{12} = 1$ cm, $d_{23} = 1$ cm $\implies$ $d_{13} = 2$ cm): Si ambos pares de hilos adyacentes distan 1 cm ($d_{13} = 2$ cm):

- En el **Hilo 1**: $B_{21} = 8 \times 10^{-8}$ T, $B_{31} = \frac{2{\times}10^{-7}{\cdot}6{\times}10^{-3}}{2{\times}10^{-2}} = 6 \times 10^{-8}$ T $\implies$ $B_{\text{en }1} = 14 \times 10^{-8}$ T (hacia afuera) y $F_{\text{en }1} = 0{,}5 \cdot 2 \times 10^{-3} \cdot 14 \times 10^{-8} = 1{,}4 \times 10^{-10}$ N (hacia la derecha).
- En el **Hilo 2**: $B_{12} = 4 \times 10^{-8}$ T (hacia adentro), $B_{32} = 12 \times 10^{-8}$ T (hacia afuera) $\implies$ $B_{\text{en }2} = (12 - 4) \times 10^{-8} = 8 \times 10^{-8}$ T (hacia afuera) y $F_{\text{en }2} = 0{,}5 \cdot 4 \times 10^{-3} \cdot 8 \times 10^{-8} = 1{,}6 \times 10^{-10}$ N (hacia la derecha).
- En el **Hilo 3**: $B_{13} = 2 \times 10^{-8}$ T (hacia adentro), $B_{23} = 8 \times 10^{-8}$ T (hacia adentro) $\implies$ $B_{\text{en }3} = 10 \times 10^{-8}$ T (hacia adentro) y $F_{\text{en }3} = 0{,}5 \cdot 6 \times 10^{-3} \cdot 10 \times 10^{-8} = 3{,}0 \times 10^{-10}$ N (hacia la izquierda).

Nuevamente se verifica el equilibrio interno: $(1{,}4 + 1{,}6 - 3{,}0) \times 10^{-10}\ \text{N} = 0\ \text{N}$.

Ejercicio Resuelto: Parcial 1 — Problema 2: Análisis por Nudos y Balance Completo de Potencias en DC

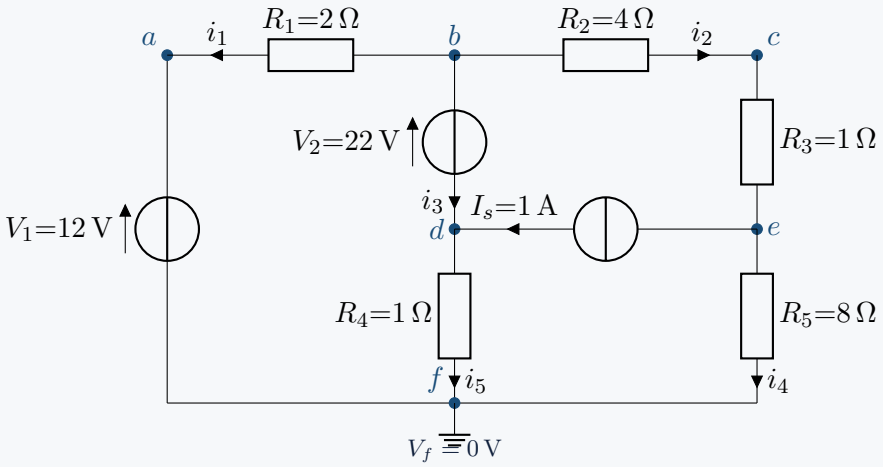
En el circuito de corriente continua de la figura:

a) Calcular las tensiones en todos los nodos (a, b, c, d, e, f) aplicando el método

de los nudos y hallar las intensidades que circulan por cada una de las ramas $(i_1, i_2, i_3, i_4, i_5)$.

b) Calcular las potencias entregadas o absorbidas por cada una de las fuentes y las potencias disipadas en las cinco resistencias ($R_1 = 2\ \Omega, R_2 = 4\ \Omega, R_3 = 1\ \Omega, R_4 = 1\ \Omega, R_5 = 8\ \Omega$), comprobando que se cumple el balance global de potencia.

Esquema Circuital Completo con sus 5 Resistencias, 3 Fuentes y 6 Nudos ($a \dots f$):



Solución Paso a Paso:

1) Relaciones de tensión inmediatas y supernudo: Tomando el nodo inferior como referencia ($V_f = 0$ V):

$$V_a = 12\ \text{V}, \qquad V_b - V_d = 22\ \text{V} \implies V_b = V_d + 22\ \text{V} \tag{7.16}$$

2) Expresión de las corrientes de rama en función de V_d y V_e:

$$i_5 = \frac{V_d - V_f}{R_4} = \frac{V_d}{1\ \Omega} = V_d \tag{7.17}$$

$$i_3 = i_5 - 1\ \text{A} = V_d - 1 \qquad \text{(aplicando LCK en el nudo } d:\ i_3 + 1 = i_5) \tag{7.18}$$

$$i_1 = \frac{V_b - V_a}{R_1} = \frac{(V_d + 22) - 12}{2} = \frac{V_d + 10}{2} \tag{7.19}$$

$$i_2 = \frac{V_b - V_e}{R_2 + R_3} = \frac{V_d + 22 - V_e}{4 + 1} = \frac{V_d + 22 - V_e}{5} \tag{7.20}$$

$$i_4 = \frac{V_e - V_f}{R_5} = \frac{V_e}{8} \tag{7.21}$$

3) Sistema de ecuaciones de Kirchhoff en los nudos b y e:

- **En el nudo b** ($i_1 + i_2 + i_3 = 0$):

$$\frac{V_d + 10}{2} + \frac{V_d + 22 - V_e}{5} + (V_d - 1) = 0 \xrightarrow{\times 10} 5V_d + 50 + 2V_d + 44 - 2V_e + 10V_d - 10 = 0 \tag{7.22}$$

$$17V_d - 2V_e = -84 \tag{7.23}$$

- **En el nudo** e ($i_2 = 1\text{ A} + i_4$):

$$\frac{V_d + 22 - V_e}{5} = 1 + \frac{V_e}{8} \xrightarrow{\times 40} 8V_d + 176 - 8V_e = 40 + 5V_e \tag{7.24}$$

$$8V_d - 13V_e = -136 \tag{7.25}$$

4) Resolución del sistema de tensiones de nudo y corrientes de rama: Resolviendo el sistema 2×2 se obtiene:

$$\boxed{V_d = -4\text{ V}, \quad V_e = 8\text{ V}, \quad V_b = 18\text{ V}, \quad V_a = 12\text{ V}, \quad V_c = V_e + i_2 R_3 = 10\text{ V}} \tag{7.26}$$

Sustituyendo en las expresiones de las intensidades:

$$\boxed{i_1 = \frac{-4+10}{2} = 3\text{ A}, \quad i_2 = \frac{10}{5} = 2\text{ A}, \quad i_3 = -4 - 1 = -5\text{ A}, \quad i_4 = 1\text{ A}, \quad i_5 = -4\text{ A}} \tag{7.27}$$

5) Cálculo de Potencias y Comprobación del Balance de Tellegen:

- **Potencias disipadas en las resistencias** ($P_R = I^2 R$)**:**

$$P_{R1} = i_1^2 R_1 = 3^2 \cdot 2 = 18\text{ W}, \qquad P_{R2} = i_2^2 R_2 = 2^2 \cdot 4 = 16\text{ W}, \quad P_{R3} = i_2^2 R_3 = 2^2 \cdot 1 = 4\text{ W}$$
$$P_{R4} = i_5^2 R_4 = (-4)^2 \cdot 1 = 16\text{ W}, \quad P_{R5} = i_4^2 R_5 = 1^2 \cdot 8 = 8\text{ W}$$

$$\sum P_{\text{resistencias}} = 18 + 16 + 4 + 16 + 8 = 62\text{ W} \tag{7.28}$$

- **Potencias en las fuentes (criterio de generador):**
  - Fuente $V_1 = 12$ V: La corriente $i_1 = 3$ A entra por su borne positivo, luego absorbe potencia: $P_{V1} = 12\text{ V} \cdot (-3\text{ A}) = -36$ W (**absorbe** 36 W).
  - Fuente $V_2 = 22$ V: Como $i_3 = -5$ A, salen 5 A por su borne positivo, luego entrega potencia: $P_{V2} = 22\text{ V} \cdot (-i_3) = 22 \cdot 5 = +110$ W (**entrega** 110 W).
  - Fuente de corriente $I_s = 1$ A: Impulsa corriente desde e (8 V) hacia d (-4 V), por lo que: $P_{Is} = (V_d - V_e) \cdot I_s = (-4 - 8) \cdot 1 = -12$ W (**absorbe** 12 W).

- **Verificación del Balance de Potencias:**

$$P_{\text{neta fuentes}} = +110\text{ W} - 36\text{ W} - 12\text{ W} = 62\text{ W} = \sum P_{\text{resistencias}} \quad \text{[OK]} \tag{7.29}$$

(Nota complementaria: en la variante alternativa donde el punto intermedio c se toma con $V_c = 14$ V, $R_3 = 5\ \Omega$ entre b y e y $R_4 = 10\ \Omega$, las corrientes son $I_1 = 2$ A, $I_2 = 1{,}5$ A, $I_3 = 2$ A, $I_4 = -0{,}4$ A, $I_5 = 1$ A y el balance resulta igualmente exacto con $\sum P_R = 8 + 9 + 20 + 1{,}6 + 8 = 46{,}6$ W y $P_{suministrada} = 55\text{ W} = 46{,}6 + 7{,}2 + 1{,}2$ W).

Ejercicio Resuelto: Parcial 1 — Problema 3: Circuito AC por Nudos, Superposición y Transformación de Fuentes

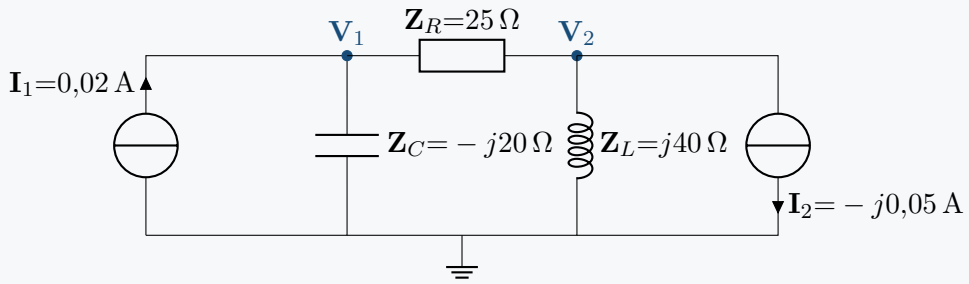
Determinar los fasores de tensión $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$ en el circuito de corriente alterna de la figura (con $\mathbf{I}_1 = 20\angle 0°$ mA $= 0{,}02$ A, $\mathbf{I}_2 = 50\angle -90°$ mA $= -j0{,}05$ A, $\mathbf{Z}_C = -j20\ \Omega$, $\mathbf{Z}_L = j40\ \Omega$ y $\mathbf{Z}_R = 25\ \Omega$) utilizando los tres métodos siguientes:

a) Resolución por el método de los nudos.

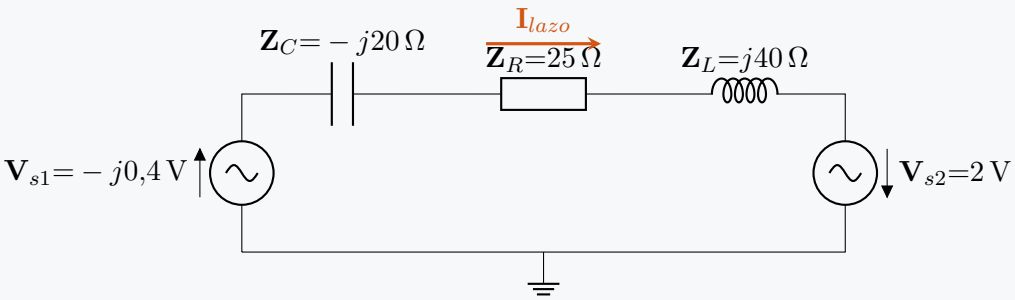
b) Resolución por el teorema de superposición.

c) Resolución por el método de transformación de fuentes.

Paso 1: Esquema Circuital en Régimen Permanente Sinusoidal:



Paso 2: Circuito Transformado a un Único Lazo Serie (Thévenin):



Solución Paso a Paso por los Tres Métodos:

Apartado a) Resolución por Nudos (con la bobina $\mathbf{Z}_L = j40\ \Omega$ entre $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$, fuente $\mathbf{I}_2$ en paralelo con ella y $\mathbf{Z}_R = 25\ \Omega$ a tierra en $\mathbf{V}_2$, según 'orig-115.png'): Aplicando LCK en los nodos $\mathbf{V}_1$ y $\mathbf{V}_2$:

$$\begin{cases} (\mathbf{V}_1): & \mathbf{I}_1 = \mathbf{I}_2 + \dfrac{\mathbf{V}_1}{\mathbf{Z}_C} + \dfrac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_L} \\ (\mathbf{V}_2): & \mathbf{I}_2 + \dfrac{\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_L} = \dfrac{\mathbf{V}_2}{\mathbf{Z}_R} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} j20\mathbf{V}_1 + j20\mathbf{V}_2 = 16 + j40 \\ -25\mathbf{V}_1 + (25 + j40)\mathbf{V}_2 = 50 \end{cases} \tag{7.30}$$

Dividiendo por 4 y reduciendo el sistema:

$$\begin{cases} j5\mathbf{V}_1 + j5\mathbf{V}_2 = 4 + j10 \\ -j5\mathbf{V}_1 + (j5 - 8)\mathbf{V}_2 = j10 \end{cases} \Longrightarrow (-8 + j10)\mathbf{V}_2 = 4 + j20 \tag{7.31}$$

$$\boxed{\mathbf{V}_2 = \frac{4 + j20}{-8 + j10} = 1{,}024 - j1{,}220\ \text{V} \approx 1{,}59\angle -50^\circ\ \text{V}} \tag{7.32}$$

Apartado b) Resolución por Superposición ($\mathbf{V} = \mathbf{V}_A + \mathbf{V}_B$):

- **Contribución 1 (Sólo con $\mathbf{I}_1 = 0{,}02$ A activa, $\mathbf{I}_2 = 0$ abierta):** Aplicando nudos en $\mathbf{V}_{1A}$:

$$0{,}02 = \frac{\mathbf{V}_{1A}}{-j20} + \frac{\mathbf{V}_{1A}}{25 + j40} \Longrightarrow (25 + j20)\mathbf{V}_{1A} = 16 - j10 \Longrightarrow \mathbf{V}_{1A} = \frac{8}{41} - j\frac{114}{205}\ \text{V} \tag{7.33}$$

Por divisor de tensión:

$$\mathbf{V}_{2A} = \frac{\mathbf{Z}_R}{\mathbf{Z}_R + \mathbf{Z}_L}\mathbf{V}_{1A} = \frac{25}{25 + j40}\mathbf{V}_{1A} = -\frac{8}{41} - j\frac{10}{41}\ \text{V} \tag{7.34}$$

- **Contribución 2 (Sólo con $\mathbf{I}_2 = -j0{,}05$ A activa, $\mathbf{I}_1 = 0$ abierta):** Transformando $\mathbf{I}_2 \parallel \mathbf{Z}_L$ en fuente serie $\mathbf{V}_{s2} = (-j0{,}05)(j40) = 2$ V:

$$\mathbf{I}_B = \frac{2}{25 + j20} = \frac{2}{41} - j\frac{8}{205}\ \text{A} \implies \mathbf{V}_{2B} = 25\mathbf{I}_B = \frac{50}{41} - j\frac{40}{41}\ \text{V}, \quad \mathbf{V}_{1B} = \frac{32}{41} + j\frac{40}{41}\ \text{V} \tag{7.35}$$

- **Suma por superposición:**

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_{1A} + \mathbf{V}_{1B} = \frac{40}{41} + j\frac{86}{205}\ \text{V} = 0{,}976 + j0{,}420\ \text{V} \approx 1{,}06\angle 23{,}3^\circ\ \text{V} \tag{7.36}$$

$$\mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{2A} + \mathbf{V}_{2B} = \frac{42}{41} - j\frac{50}{41}\ \text{V} = 1{,}024 - j1{,}220\ \text{V} \approx 1{,}59\angle -50^\circ\ \text{V} \tag{7.37}$$

Apartado c) Resolución por Transformación de Fuentes:

1) Transformamos $\mathbf{I}_1 \parallel \mathbf{Z}_C$ en fuente de tensión serie: $\mathbf{V}_{s1} = \mathbf{I}_1 \cdot \mathbf{Z}_C = 0{,}02 \cdot (-j20) = -j0{,}4$ V.

2) Transformamos $\mathbf{I}_2 \parallel \mathbf{Z}_L$ en fuente de tensión serie: $\mathbf{V}_{s2} = \mathbf{I}_2 \cdot \mathbf{Z}_L = (-j0{,}05) \cdot (j40) = +2$ V.

3) La impedancia serie total del único lazo es $\mathbf{Z}_{total} = 25 + j(40 - 20) = 25 + j20\ \Omega$.

4) Según la polaridad de $\mathbf{V}_{s1}$ y $\mathbf{V}_{s2}$ en el lazo:

   - Con $\mathbf{V}_{neto} = 2 - j0{,}4$ V:

$$\mathbf{I}_{lazo} = \frac{2 - j0{,}4}{25 + j20} = 0{,}041 - j0{,}049\ \text{A} \implies \mathbf{V}_2 = 25\mathbf{I}_{lazo} \approx 1{,}59\angle -50^\circ\ \text{V} \tag{7.38}$$

   - Con $\mathbf{V}_{neto} = 2 - (-j0{,}4) = 2 + j0{,}4$ V (como en el Paso 2):

$$\mathbf{I}_{lazo} = \frac{2 + j0{,}4}{25 + j20} \approx 0{,}0566 - j0{,}0293\ \text{A} \implies \mathbf{V}_2 = 25\mathbf{I}_{lazo} \approx 1{,}59\angle -27{,}3^\circ\ \text{V} \tag{7.39}$$

7.2 Examen Parcial 2: Dispositivos Electrónicos y Electrónica Digital

Ejercicio Resuelto: Parcial 2 — Problema 1: Implementación de Función Booleana en Lógica NMOS y CMOS

Diseñar a nivel físico de transistores la función lógica booleana:

$$Y = (A + B) \cdot C + D \cdot E \qquad \Big(\text{así como la variante invertida } Y' = \overline{(A + B) \cdot C + D}\Big) \tag{7.40}$$

empleando:

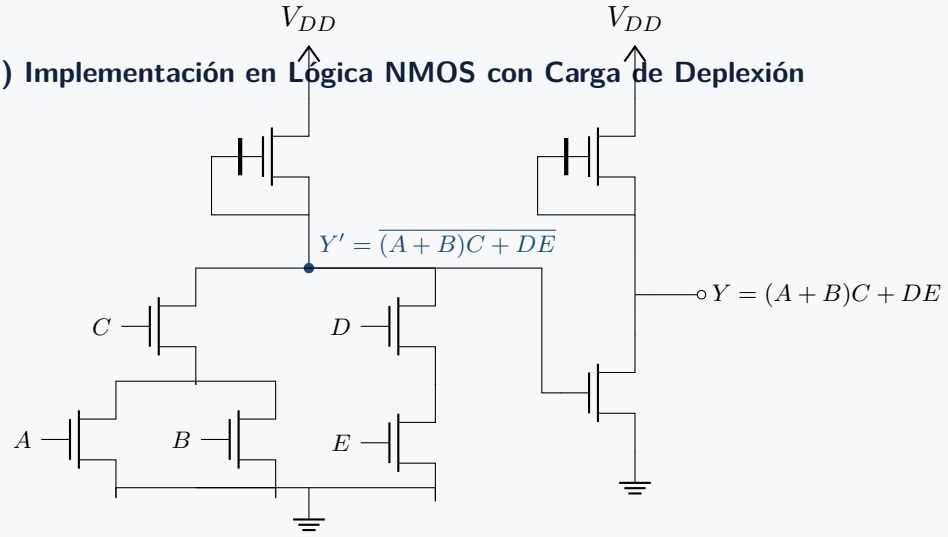
a) Lógica NMOS con carga activa NMOS de deplexión.

b) Lógica CMOS estática complementaria completa.

a) Diseño con Lógica NMOS con Carga NMOS de Deplexión:

En lógica NMOS, la red de conmutación inferior (*Pull-Down Network*, PDN) sintetiza directamente la expresión booleana sin negar, produciendo en su drenador común la función complementada $Y' = \overline{(A+B)\cdot C + D\cdot E}$:

- La suma lógica $(A+B)$ se implementa con dos transistores NMOS de enriquecimiento (N_A, N_B) en **paralelo**.
- El producto por C conecta el bloque paralelo $(N_A \parallel N_B)$ en **serie** con el transistor N_C.
- La suma con el término $D \cdot E$ añade en **paralelo** una segunda rama vertical formada por N_D y N_E en **serie** (o un único transistor N_D en la variante $Y' = \overline{(A+B)\cdot C + D}$).
- La carga de *Pull-Up* hacia V_{DD} es un transistor NMOS de deplexión con su puerta unida a su fuente ($V_{GS} = 0$).
- Para obtener la salida sin negar $Y = (A+B)\cdot C + D\cdot E$, se añade a continuación una etapa inversora NMOS.



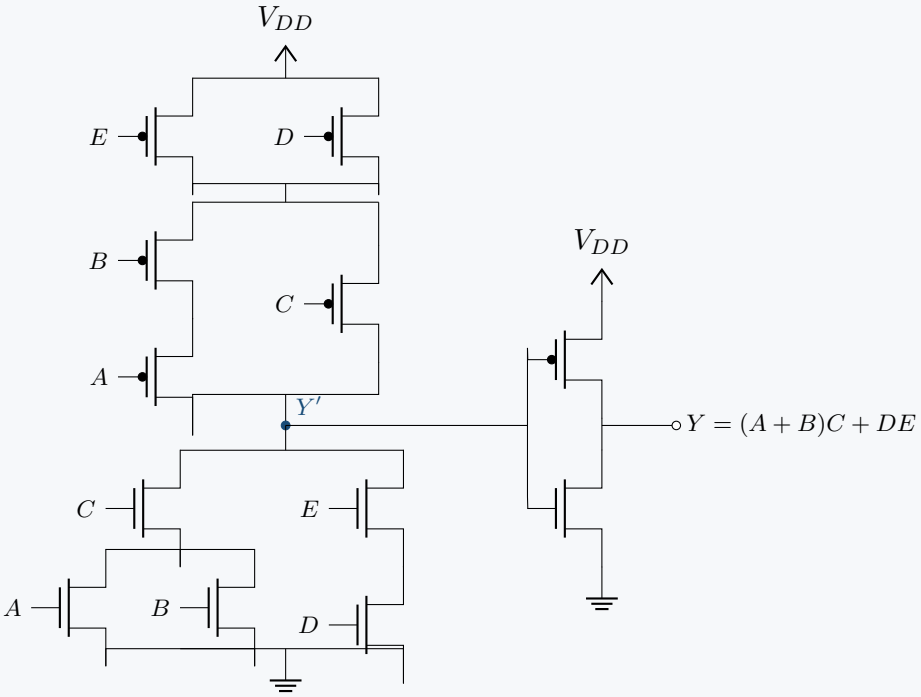
b) Diseño con Lógica CMOS Estática Complementaria:

En tecnología CMOS se elimina la carga resistiva o de deplexión y se emplea una **Red de Pull-Up (PUN)** formada exclusivamente por transistores PMOS que es el **grafo dual exacto** de la **Red de Pull-Down (PDN)** de transistores NMOS:

- **Red PDN (NMOS inferior):** Idéntica al apartado anterior: $[(N_A \parallel N_B)$ serie $N_C] \parallel (N_D$ serie $N_E)$.
- **Red PUN (PMOS superior):** Por dualidad serie $\leftrightarrow$ paralelo:
  - El bloque $(D \cdot E)$ pasa a ser dos PMOS en **paralelo**: $(P_D \parallel P_E)$.

  - El bloque $(A + B) \cdot C$ pasa a ser (P_A en serie con P_B) conectado en **paralelo** con P_C.
  - Ambos subbloques se conectan en **serie** entre V_{DD} y el nodo de salida Y'.
- Finalmente, un **inversor CMOS** (P_{inv} arriba y N_{inv} abajo) invierte Y' para entregar $Y = (A + B)C + DE$.

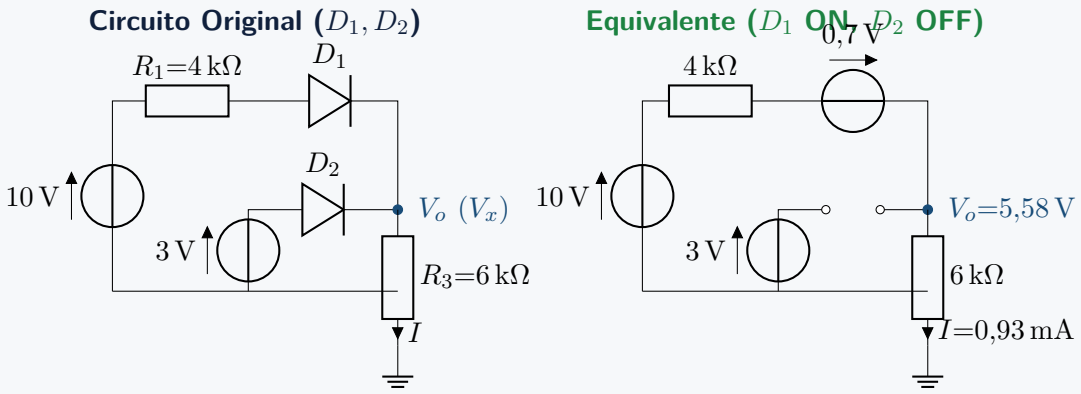
b) Implementación en Lógica CMOS Complementaria



Ejercicio Resuelto: Parcial 2 — Problema 2a: Discriminación de Estados ON/OFF en Red de Diodos (D_1, D_2)

En el circuito de la figura, determinar razonadamente si los diodos D_1 y D_2 están en conducción (ON) o en corte (OFF) y calcular la tensión de salida V_o (o V_x), empleando el segundo modelo lineal del diodo con tensión umbral $V_\gamma = 0{,}7$ V.

Esquema Circuital Original y Modelo Equivalente bajo la Hipótesis Correcta (D_1 ON, D_2 OFF):



Solución Paso a Paso:

1) **Análisis inicial:** Si supusiéramos ambos diodos en corte (D_1 OFF y D_2 OFF), por la resistencia de 6 kΩ no circularía corriente ($V_o = 0$ V), con lo que las tensiones ánodo-cátodo serían $V_{D1} = 10$ V $> 0{,}7$ V y $V_{D2} = 3$ V $> 0{,}7$ V. Por tanto, al menos uno de los diodos tiene que conducir. Como la fuente de la izquierda (10 V) es mucho mayor que la de la derecha (3 V), formulamos la hipótesis más plausible:

2) **Hipótesis 1: D_1 ON y D_2 OFF:** Sustituimos D_1 por su fuente de tensión umbral $V_\gamma = 0{,}7$ V y D_2 por un circuito abierto. La corriente I por la malla única izquierda es:

$$I = I_{D1} = \frac{10\text{ V} - 0{,}7\text{ V}}{4\text{ k}\Omega + 6\text{ k}\Omega} = \frac{9{,}3\text{ V}}{10\text{ k}\Omega} = 0{,}93\text{ mA} \tag{7.41}$$

La tensión en el nudo común de salida V_o es:

$$\boxed{V_o = I \cdot 6\text{ k}\Omega = 0{,}93\text{ mA} \times 6\text{ k}\Omega = 5{,}58\text{ V}} \tag{7.42}$$

3) **Comprobación de las condiciones de consistencia:**

- Para D_1 (supuesto ON): $I_{D1} = 0{,}93$ mA > 0 (y el potencial antes del diodo es $10 - 4 \cdot 0{,}93 = 6{,}28$ V, luego $V_{D1} = 6{,}28 - 5{,}58 = 0{,}7$ V) $\implies$ D_1 **ON verificado**.
- Para D_2 (supuesto OFF): $V_{D2} = V_{A2} - V_o = 3\text{ V} - 5{,}58\text{ V} = -2{,}58\text{ V} < V_\gamma = 0{,}7$ V $\implies$ D_2 **OFF verificado**.

4) **Comprobación adicional de que NO puede darse D_1 ON y D_2 ON:** Si ambos condujeran, la rama de D_2 fijaría $V_o = 3\text{ V} - 0{,}7\text{ V} = 2{,}3$ V. Entonces:

$$I_{6\text{k}} = \frac{2{,}3\text{ V}}{6\text{ k}\Omega} = 0{,}383\text{ mA}, \qquad I_{D1} = \frac{10 - 0{,}7 - 2{,}3}{4\text{ k}\Omega} = \frac{7\text{ V}}{4\text{ k}\Omega} = 1{,}75\text{ mA} \tag{7.43}$$

Aplicando LCK en el nudo V_o:

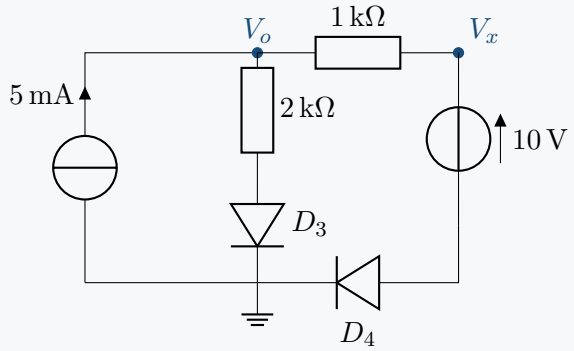
$$I_{D1} + I_{D2} = I_{6\text{k}} \implies I_{D2} = I_{6\text{k}} - I_{D1} = 0{,}383 - 1{,}75 = -1{,}367\text{ mA} < 0 \tag{7.44}$$

Como un diodo no puede conducir corriente negativa de cátodo a ánodo, la hipótesis de conducción simultánea queda descartada.

Ejercicio Resuelto: Parcial 2 — Problema 2b: Discriminación de Estados ON/OFF en Red con Fuente de Corriente (D_3, D_4)

Determinar razonadamente el estado de conducción (ON u OFF) de los diodos D_3 y D_4 y el valor de la tensión V_o en el circuito de la figura, empleando el segundo modelo lineal del diodo con $V_\gamma = 0{,}7$ V.

Esquema Circuital (D_3, D_4):



Solución Paso a Paso (evaluando sistemáticamente las hipótesis del manuscrito 'orig-119.png'):

1) **Análisis inicial:** La fuente de corriente de 5 mA inyecta corriente de forma obligatoria hacia el nudo V_o, por lo que no pueden estar ambos diodos en corte simultáneamente.

2) **Hipótesis A (D_3 OFF y D_4 ON):** Si D_3 está abierto (OFF), toda la corriente de la fuente ($I = 5$ mA) circula hacia la derecha por la resistencia de 1 kΩ y regresa a tierra atravesando la fuente de 10 V y el diodo D_4 ($I_{D4} = 5$ mA > 0). Con la orientación mostrada en el esquema del examen ('orig-119.png'), el potencial en el nudo intermedio derecho es:

$$V_x = 0 + 0{,}7 \text{ V} - 10 \text{ V} = -9{,}3 \text{ V} \tag{7.45}$$

Y la tensión en el nudo V_o resulta:

$$V_o - V_x = I \cdot 1 \text{ k}\Omega \implies V_o = -9{,}3 \text{ V} + (5 \text{ mA} \times 1 \text{ k}\Omega) = -9{,}3 + 5 = -4{,}3 \text{ V} \tag{7.46}$$

Comprobamos el estado de D_3: al estar su cátodo a tierra (0 V) y la tensión superior en $V_o = -4{,}3$ V $< 0{,}7$ V, el diodo D_3 tiene tensión ánodo-cátodo negativa ($V_{D3} < V_\gamma$), confirmando que D_3 **está OFF y** D_4 **está ON** con $V_o = -4{,}3$ V.

3) **Comprobación de las demás combinaciones (D_3 ON y D_4 ON, o D_3 ON y D_4 OFF):**

- Si suponemos D_3 **ON y** D_4 **ON**: entonces $V_x = -10{,}7$ V y la ecuación de nudo en V_o es:

$$5 \text{ mA} = \frac{V_o - 0{,}7}{2 \text{ k}\Omega} + \frac{V_o + 10{,}7}{1 \text{ k}\Omega} \implies 3V_o = -10{,}7 \implies V_o = -3{,}57 \text{ V} \tag{7.47}$$

  Con $V_o = -3{,}57$ V $< 0{,}7$ V, por la rama de D_3 la corriente iría hacia arriba ($I_{D3} < 0$), lo cual contradice que D_3 esté ON.

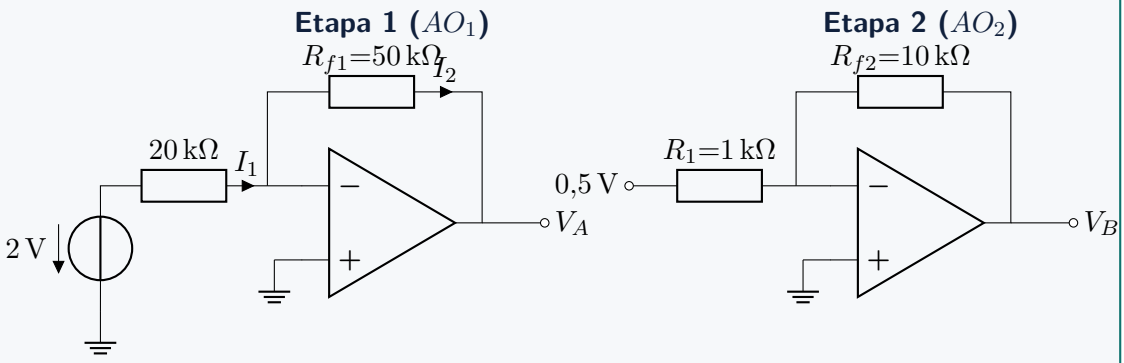
- Si suponemos D_3 **ON y** D_4 **OFF**: toda la corriente de 5 mA bajaría por la rama de 2 kΩ, dando $V_o = 0{,}7 + 5$ mA $\times$ 2 kΩ $= +10{,}7$ V, lo que polarizaría fuertemente en directa a la rama derecha haciendo conducir a D_4.

Ejercicio Resuelto: Parcial 2 — Problema 3: Circuito con Dos Amplificadores Operacionales Acoplados (V_{AB})

En el circuito de la figura, calcular las tensiones en los nodos de salida V_A y V_B de los dos amplificadores operacionales ideales AO_1 y AO_2, así como la diferencia de potencial entre ambos, $V_{AB} = V_A - V_B$.

- El operacional AO_1 tiene una resistencia de realimentación de 50 kΩ, su terminal no inversor conectado a tierra a través de 1 MΩ, y a su entrada inversora llega una red formada por una fuente de corriente de 2 mA (dirigida hacia abajo) en paralelo con una resistencia de 1 kΩ, conectada en serie con una resistencia de 19 kΩ a tierra.
- El operacional AO_2 está configurado como inversor con entrada de 0,5 V a través de 1 kΩ y resistencia de realimentación de 10 kΩ (o equivalentemente 10 kΩ y 100 kΩ, relación de ganancia −10), con una resistencia de acoplamiento de 10 kΩ entre los nodos A y B.

Esquema Circuital de las Dos Etapas con Op-Amps (tras transformar la fuente de entrada):



Solución Paso a Paso:

1) **Cálculo de V_B en el operacional AO_2:** El operacional AO_2 forma un amplificador inversor cuya tensión de salida en el nodo B queda fijada directamente por su lazo de realimentación negativa ($V^+ = V^- = 0$ V):

$$\boxed{V_B = -\frac{R_{f2}}{R_1} \cdot 0{,}5 \text{ V} = -\frac{10 \text{ k}\Omega}{1 \text{ k}\Omega} \cdot 0{,}5 \text{ V} = -5{,}0 \text{ V}} \tag{7.48}$$

2) **Transformación de la fuente de corriente en la entrada de AO_1:** La fuente de intensidad de 2 mA (apuntando hacia abajo) en paralelo con la resistencia de 1 kΩ se transforma en su equivalente de Thévenin: una fuente de tensión de valor $V_s = 2 \text{ mA} \times 1 \text{ k}\Omega = 2$ V (con el polo negativo arriba y el positivo abajo) en serie con la resistencia de 1 kΩ. Al sumarse en serie con la resistencia de 19 kΩ conectada a tierra, la rama de entrada equivale a un generador de −2 V en serie con una resistencia total $R_{eq} = 1 \text{ k}\Omega + 19 \text{ k}\Omega = 20 \text{ k}\Omega$.

3) **Cálculo de V_A en el operacional AO_1:** Como no circula corriente por la resistencia de 1 MΩ ($I^+ = 0$), el terminal no inversor está a $V^+ = 0$ V y, por cortocircuito virtual,

$V^- = V^+ = 0$ V. La intensidad I_1 que circula desde el generador equivalente hacia el nodo inversor es:

$$I_1 = \frac{-2\text{ V} - V^-}{20\text{ k}\Omega} = \frac{-2\text{ V}}{20\text{ k}\Omega} = -0{,}1\text{ mA} \tag{7.49}$$

Por la primera ley de Kirchhoff en el nodo inversor ($I^- = 0 \implies I_1 = I_2$):

$$I_2 = \frac{0 - V_A}{50\text{ k}\Omega} = I_1 \implies \boxed{V_A = -50\text{ k}\Omega \cdot I_1 = -50\text{ k}\Omega \cdot (-0{,}1\text{ mA}) = +5{,}0\text{ V}} \tag{7.50}$$

4) **Diferencia de potencial V_{AB}:**

$$\boxed{V_{AB} = V_A - V_B = 5{,}0\text{ V} - (-5{,}0\text{ V}) = +10{,}0\text{ V}} \tag{7.51}$$